مكتبة
الدراسات الفلسفية

جامعة الدول العربية
الإدارة الثقافية

برتراند رسل

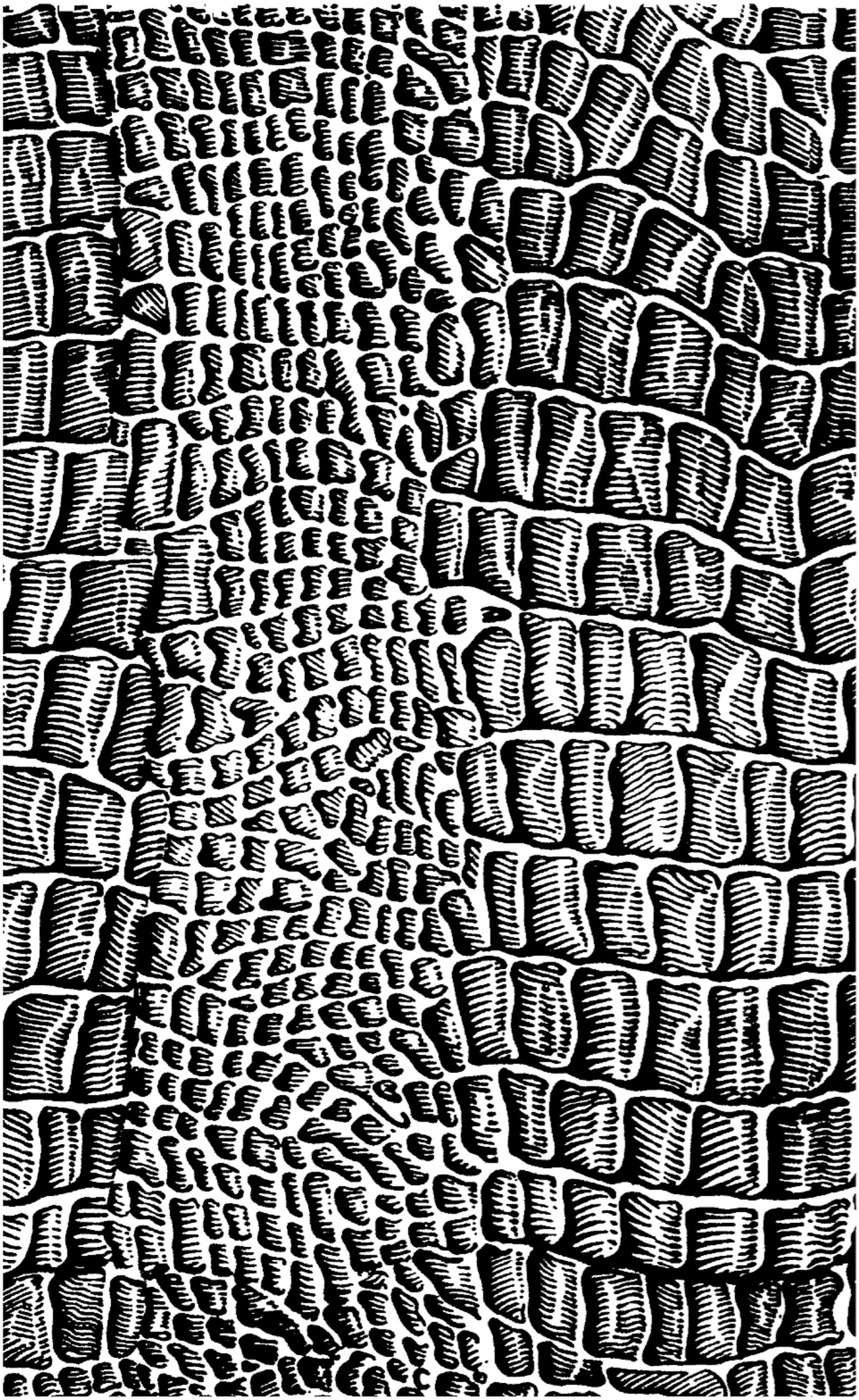
أصول الرياضيات

١

ترجمة

الدكتور محمد مرسي أحمد و الدكتور أحمد فؤاد الأهواني

دار المعارف بمصر



أُصُولُ الرِّياضِيّات

ملتزم الطبع والنشر : دار المعارف بمصر

مقدمة الطبعة الثانية

دون معظم ما جاء فى كتاب « مبادئ الرياضة » سنة ١٩٠٠ ، ونشر سنة ١٩٠٣ ، فنوقشت الموضوعات التى تناولها مناقشة واسعة خلال السنوات التالية ، وتحسنت صفة المنطق الرياضى تحسنا كبيراً ، وظهرت مسائل جديدة ، وبقيت مسائل أخرى قديمة بغير حل ، واتخذت بعض المسائل صوراً جديدة مع بقائها موضع البحث والجدل ، وفى ضوء هذه الظروف رأيت ألا فائدة من محاولة إصلاح هذه المسألة أو تلك فى الكتاب الذى لم يعد يعبر عن آرائى الحاضرة . أما قيمة الكتاب الآن فهى قيمة تاريخية من جهة أنه يمثل مرحلة معينة فى تطور الموضوع الذى يعالجه . من أجل ذلك لم أغير فيه شيئاً ، ولكننى سأحاول فى هذه المقدمة أن أعلن عن الأمور التى لا أزال أتمسك بالآراء التى يعبر عنها الكتاب ، وعن الأمور الأخرى التى أظهرت المباحث الجديدة أننى كنت فيها على خطأ .

إن القضية الأساسية التى تجرى خلال صفحات الكتاب ، وهى أن الرياضة والمنطق متطابقان ، من القضايا التى لا أجد سبباً منذ إعلانها لتعديلها . وقد كانت هذه القضية أول الأمر غير مألوفة لارتباط المنطق ارتباطاً مأثوراً بالفلسفة وأرسطو ، بحيث شعر الرياضيون أن الاشتغال به خارج عن نطاق عملهم ؛ وبرم الذين يعتبرون أنفسهم مناطقة حين طلب منهم تعلم الفن الرياضى الجديد الصعب ، غير أن هذه المشاعر لم تكن ليدوم أثرها لو أنها عجزت عن التماس العون فى أسباب أعمق للشك ، وهذه الأسباب هى بصفة عامة من نوعين متقابلين : الأول أن ثمة صعوبات معينة فى المنطق الرياضى لم تحل بعد ، مما يجعله يظهر أقل يقيناً مما كان يعتقد فى الرياضة ، والثانى أننا إذا قبلنا الأساس المنطقى للرياضة ، فإن ذلك يبرر أو يميل إلى تبرير كثير من البحث ، مثل الذى قام به «جورج كانتور» والذى ينظر إليه كثير من الرياضيين بعين الشك

على أساس المتناقضات التى لم تحل والتى تشترك مع المنطق . هذان التياران المتقابلان من النقد يمثلهما أصحاب المذهب الصورى وعلى رأسهم « هلبرت » ، وأصحاب المذهب الحدسى وعلى رأسهم « بروار » (Brouwer)

وليس التأويل الصورى للرياضة جديداً بأى حال ؛ ولكننا لتحقيق أغراضنا قد نتجاهل صورها القديمة . ويقوم هذا التأويل ، كما يقدمه «هلبرت» مثلا فى مجال العدد ، على ترك الأعداد الصحيحة بغير تعريف مع التسليم فى شأنها ببديهيات تجعل استنتاج القضايا العددية العادية ممكناً . وبعبارة أخرى لا نعين أى معنى لهذه الرموز ٠ ، ١ ، ٢ . . . فيما عدا أن لها بعض الخصائص المعدودة فى البديهيات . يجب إذن اعتبار هذه الرموز على أنها متغيرات . ويمكن تعريف الأعداد الصحيحة الأخيرة حين يعطى الصفر ، أما الصفر فيجب أن يكون مجرد شىء له الخصائص المعينة . وتبعاً لذلك لا تمثل الرموز ٠ ، ١ ، ٢ . . . . سلسلة واحدة محدودة ، بل أى متوالية كانت . وقد غفل الصوريون عن أن الأعداد مطلوبة لا للحصول على الجمع فقط ، بل للعد أيضاً . فهذه القضايا مثل : « وجد ١٢ رسولا » أو « فى لندن ٦,٠٠٠,٠٠٠ من السكان » لا يمكن تأويلها فى نظامهم . لأن الرمز « ٠ » قد يؤخذ على أنه يعنى أى عدد صحيح متناه ، دون أن يترتب على ذلك أن تكون أى بديهية من بديهيات « هلبرت » كاذبة . وهكذا يصبح كل عدد رمزى مبهماً إلى ما لا نهاية له فى الإبهام . ويشبه الصوريون صانع الساعات الذى يستهويه عمل ساعات ذات شكل جميل ، فيغفل عن غرضه الأصلى من صناعتها للدلالة على الوقت ، ولا يضع فيها أى آلات .

وهناك صعوبة أخرى فى موقف الصوريين تختص بالوجود . ذلك أن « هلبرت » يزعم أنه إذا كانت سلسلة البديهيات لا تفضى إلى تناقض ، فلا بد من وجود سلسلة من الأشياء تحقق البديهيات . وتبعاً لذلك فإنه بدلا من البحث عن إقامة نظريات وجودية بضرب الأمثلة ، يشغل نفسه بطرق إثبات خلو بديهياته من التناقض . وعنده أن « الوجود » كما يفهم عادة هو تصورٌ ميتافيزيقى لا لزوم له ، يجب أن يحل محله تصور آخر دقيق وهو عدم التناقض . وهو هنا

ينسى أن للحساب فوائد عملية ، وأنه لا نهاية للنظم القائمة على بديهيات عدم التناقض ، والتى يمكن اختراعها . أما الأسباب التى من أجلها نحفل بوجه خاص بالبديهيات التى تفضى إلى الحساب العادى فإن هذه الأسباب تقع خارج الحساب ، وتتصل بتطبيق العدد على المواد الحسية ، وهذا التطبيق نفسه لا يكون جزءاً من المنطق أو الحساب ، ولكن النظرية التى تذهب إلى القول أولياً باستحالة هذا التطبيق لا يمكن أن تكون صحيحة ، ذلك أن التعريف المنطقى للأعداد يجعل صلتها بالعالم الواقعى المكون من أشياء معدودة أمراً مفهوماً ، على حين أن نظرية الصوريين لا تجعلها كذلك .

أما النظرية الحدسية التى مثلها أولا « بروار » ثم بعد ذلك « فايل » Weyl فهى أعظم خطراً . وهناك فلسفة مرتبطة بهذه النظرية نستطيع أن نتجاهلها حتى لا نحيد عن غرضنا ، لأن أثرها فى المنطق والرياضة هو الذى يعنينا ، والنقطة الأساسية فى هذا الصدد هى رفض اعتبار القضية صادقة أو كاذبة حتى نستقر على طريقة تحدد أى وجهة منهما . وينكر « بروار » قانون الثالث المرفوع حيث لا توجد مثل تلك الطريقة . وهذا يهدم مثلا البرهان القائل بأن هناك أعداداً حقيقية أكثر من الأعداد النسبية ، وأن كل متوالية فى سلسلة الأعداد الحقيقية لها نهاية . وترتب على ذلك أن أجزاءاً كبيرة من التحليل التى ظن لقرون كثيرة أنها تقوم على أساس وطيد قد أصبح مشكوكاً فيها .

ويرتبط بهذه النظرية المذهب المسمى بالنهائية Finitism ، والذى يضع موضع الشك القضايا التى يدخل فيها مجموعات لا نهائية أو سلاسل لا نهائية على أساس أن تلك القضايا لا يمكن تحقيقها . وهذا المذهب مظهر من مظاهر التجريبية السائدة ، ويجب إذا حملناه على محمل الجد أن يفضى إلى نتائج أكثر هدماً مما يعترف به أنصاره ، فالناس مثلاً ولو أنهم يكونون فصلا متناهياً ، فمن المستحيل من الناحية العملية والتجريبية عدهم ، كما لو كان عددهم لا نهائياً . ولو سلمنا بمبدأ أصحاب النهائية فلا ينبغى أن نقرر أى عبارة هامة — مثل « جميع الناس فانون » — تدور حول مجموعة تعرفها خصائصها ، ولا

يذكر بالفعل فى تعريفها جميع أفرادها . وهذا قد يمسح بجرة قلم جميع العلوم وجميع الرياضيات ، وليس فقط تلك الأجزاء التى يعتبرها الحدسيون موضع شك . ومع ذلك فلا يمكن اعتبار النتائج المفجعة دليلاً على فساد المذهب ، وإذا كان لا بد من إقامة الدليل على فساد مذهب النهائية ، فإنما يكون ذلك بمواجهته بنظرية كاملة فى المعرفة . ولست أعتقد شخصياً فى صحته ، ولكنى لا أظن أن ردا قصيراً سهلا على ذلك المذهب أمر ممكن .

ويجد القارئ مناقشة بديعة وكاملة لمسألة تطابق الرياضة والمنطق أو عدم تطابقهما فى المجلد الثالث من كتاب جورجنسن Jörgensen « رسالة فى المنطق الصورى » ص ٥٧ — ٢٠٠ ، حيث يجد فحصاً جديا للحجج التى أثيرت ضد هذه القضية، وانتهى المؤلف إلى نتيجة — هى بوجه عام ما أعتقده — وهى أنه على الرغم من ظهور أدلة جديدة فى السنوات الأخيرة ترفض رد الرياضة إلى المنطق ، فلا شىء من هذه الأدلة حاسم بأى حال .

وهذا يفضى بنا إلى تعريف الرياضة الذى نستهل به هذا الكتاب ، وهو تعريف لا بد من إجراء تعديلات متعددة عليه . فأولا الصورة « ق يلزم عنها ك » ليست إلا صورة من صور منطقية كثيرة يمكن أن تتخذها القضايا الرياضية . وقد انتهيت فى الأصل إلى تأكيد هذه الصورة من اعتبار الهندسة . وكان من الواضح أن الهندسة الأقليدية وغير الأقليدية على السواء يجب أن تدخلا فى الرياضة البحتة ولا يجب اعتبارهما متناقضتين فيما بينهما . فعلينا أن نحكم فقط بأن البديهيات يلزم عنها القضايا ، لا أن البديهيات صادقة فالقضايا صادقة تبعاً لذلك . وقد أفضت بى مثل هذه الحالات إلى المغالاة فى قيمة اللزوم مع أنه ليس إلا واحداً من جملة دوال الحقيقة ، وليس أكثر أهمية من غيره . ثم حين قلت: « ق و ك قضيتان تشتملان على متغير واحد أو جملة متغيرات» فالأصح بالطبع أن نقول إنها دوال قضايا . ومع ذلك فيمكن الاعتذار عما قيل على أساس أن دوال القضايا لم تكن قد عرفت بعد ، ولم تكن مألوفة عند المناطقة أو الرياضيين .

وأنتقل بعد ذلك إلى أمر أكثر خطراً ، وهو قولى : « علماً بأن كلا من ى ، ك لا تشتمل على ثوابت غير الثوابت المنطقية » . وأرجئ بعض الوقت مناقشة الثوابت المنطقية ما هى . ولأسلم بأن هذه الثوابت معروفة كى أعرض هذه المسألة ، وهى أن اختفاء الثوابت غير المنطقية ولو أن ذلك شرط ضرورى فى الصفات الرياضية فى القضية إلا أنه شرط غير كاف . ولعل أفضل الأمثلة على هذا أن نذكر بعض التقريرات المتعلقةِ بعدد الأشياء فى العالم ، خذ مثلاً « يوجد فى العالم ثلاثة أشياء على الأقل » . فهذا يساوى قولك : « يوجد ثلاثة أشياء س ، ص ، ﻫ وخاصيات Φ ، Ψ ، X ، بحيث تكون س لا ص لها الخاصية ϕ ، س لا ﻫ لها الخاصية Ψ ، ص لا ﻫ لها الخاصية X » . هذا القول يمكن التعبير عنه بعبارات منطقية بحتة ، ويمكن إثباته منطقيا عن فصول فصول فصول ، يجب أن يوجد منها فى الواقع على الأقل أربعة حتى ولو لم يوجد العالم . لأنه فى تلك الحالة قد يوجد فصل واحد هو الفصل الصفرى ؛ وفصلا فصول هى فصل اللافصول ، والفصل الذى حده الوحيد هو الفصل الصفرى ؛ وأربعة فصول لفصول فصول هى الفصل الصفرى ، والفصل الذى حده الوحيد هو الفصل الصفرى ، والفصل الذى حده الوحيد هو الفصل الذى حده الوحيد هو الفصل الصفرى ، والفصل الذى هو مجموعة الفصلين الأخيرين . ولكن فى الأصناف الدنيا ، أى تلك الخاصة بالأفراد ، وبالفصول ، وبفصول الفصول ، لا يمكن منطقيا إثبات وجود ثلاثة أعضاء على الأقل . وعلينا أن نتوقع شيئاً من هذا القبيل وذلك لطبيعة المنطق ذاته ، لأن المنطق يهدف إلى الاستقلال عن الواقع التجريبى ، ووجود الكون هو واقع تجريبى . حقا لو أن العالم لم يوجد ما وجدت كتب المنطق ، ولكن وجود كتب المنطق ليس مقدمة من مقدمات المنطق ، ولا يمكن استنتاجه من أى قضية لها الحق فى أن تسطر فى هذه الكتب .

إن مقداراً كبيراً من الرياضة ممكن عمليا دون التسليم بوجود أى شىء ، فجميع الحساب الأولى المتعلق بالأعداد الصحيحة المتناهية والكسور الاعتيادية

يمكن تركيبه ، ويصبح ذلك مستحيلا عند ما يتطلب الأمر فصولا لامتناهية من الأعداد الصحيحة ، وهذا يستبعد الأعداد الحقيقية وجميع التحليل ، فإذا أردنا أن يشتمل الحساب عليهما احتجنا إلى « بديهية اللانهاية » التى تقرر أنه إذا كانت ن أى عدد متناه ، فهناك على الأقل فصل واحد له ن كأفراد . وفى الوقت الذى كتبت فيه « الأصول » ،[1] افترضت إمكان إثبات ذلك ، فلما نشرت مع الدكتور هوايتهيد كتاب "Principia Mathematica" أصبحنا مقتنعين بأن ذلك البرهان المزعوم خاطئ .

وتعتمد الحجة السابقة على مذهب الأصناف ، وهذا المذهب على الرغم من وروده فى صورة غير دقيقة فى الملحق « ب » من هذا الكتاب ، فلم يبلغ بعد مرحلة التطور التى تبين أن وجود الفصول اللانهائية لا يمكن إثباته منطقيا . أما ما ذكرته عن نظريات الوجود فى الفقرة الأخيرة من الباب الأخير من هذا الكتاب ، فلم يعد يظهر لى أنه صحيح : فمثل هذه النظريات الوجودية فيما عدا بعض الاستثناءات ، هى كما أقول الآن أمثلة على القضايا التى يعبر عنها فى حدود منطقية ، ولكنها لا يمكن أن تثبت أو تبطل إلا بدليل تجريبى .

ومثال آخر هو بديهية الضرب أو بديهية « زرملو Zermelo » الخاصة بالانتخاب والتى تكافئها . وتقرر هذه البديهية أنه إذا علمت مجموعة من الفصول المتباعدة فيما بينها بحيث لا يكونّ أى واحد منها صفراً ، فهناك على الأقل فصل واحد يتكون من ممثل واحد من كل فصل من فصول المجموعة . ولست أدرى أيكون هذا صحيحاً أو لا . ومن السهل تخيل عوالم تكون فيها صحيحة ، ومن المستحيل إثبات وجود عوالم ممكنة تكون فيها باطلة . وكذلك من المستحيل (على الأقل هذا ما أعتقده) إثبات عدم وجود عوالم ممكنة تكون فيها باطلة . ولم أتبين ضرورة هذه البديهية إلا بعد نشر كتاب «الأصول» بعام . من أجل ذلك يشتمل هذا الكتاب على بعض الأخطاء ، مثال ذلك الحكم (فى بند ١١٩) بأن تعريفى اللانهاية متكافئتان ، ولا يمكن إثبات ذلك إلا إذا سلمنا ببديهية الضرب .

---

(١) يريد المؤلف هذا الكتاب أى « أصول الرياضيات » .

وتبين مثل هذه الأمثلة – التى يمكن مضاعفتها إلى ما لا نهاية له – أن قضية ما قد تحقق التعريف الموجود فى استهلال هذا الكتاب ، ومع ذلك تعجز عن الإثبات أو عدم الإثبات المنطقى أو الرياضى. وجميع القضايا الرياضية يشملها التعريف (مع بعض تعديلات يسيرة) ولكن ليست جميع القضايا الداخلة رياضية . فلكى تنتمى القضية للرياضة لا بد أن يكون لها خاصية أخرى كما يقول « وتنجشتين » ، يجب أن تكون « تكرارية » ، tautological ، وعند «كارناب» أنها « تحليلية » ، وليس من السهل بأى حال الحصول على تعريف دقيق لهذه الخاصية . وفضلا عن ذلك فقد بيّن كارناب أنه لا بد من التمييز بين « تحليلى » و « قابل للإثبات » ، باعتبار أن المعنى الأخير تصور أضيق نوعاً ما . الحق أن القضية أتكون تحليلية أم قابلة للإثبات ، فذلك يتوقف على جهاز المقدمات التى نبدأ منها ، فإلى أن يكون عندنا معيار نزن به المقدمات المنطقية المقبولة تصبح مسألة القضايا المنطقية موكولة إلى اختيارنا إلى حد كبير جدا ، وهذه نتيجة غير مرضية ، ولست أقبلها على أنها نهائية . ولكن قبل أن نقول شيئاً أكثر من ذلك حول هذا الموضوع ، علينا أن نناقش مسألة « الثوابت المنطقية » التى تلعب دوراً جوهريا فى تعريف الرياضة ، كما جاء فى استهلال هذا الكتاب .

وثمة أسئلة ثلاثة بالنسبة للثوابت المنطقية : أولا أتوجد مثل هذه الثوابت ؟ ثانياً ، كيف تعرف ؟ ثالثاً ، هل ترد فى القضايا المنطقية ؟ والأول والثالث من هذه الأسئلة فى غاية الإبهام ، ولكن قليلاً من المناقشة قد يجلو معانيها المتعددة .

أولا : هل توجد ثوابت منطقية ؟ هناك ناحية واحدة من هذا السؤال يمكننا أن نجيب عنها بجواب مثبت محدود تماماً : فى التعبير اللغوى أو الرمزى للقضايا المنطقية توجد ألفاظ أو رموز تلعب دوراً ثابتاً ، أى لها نفس المساهمة فى دلالة القضايا حيثما ترد . مثال ذلك « أو » « و » « لا » « بما أن – إذن » « الفصل الصفرى » « ٠ » « ١ » « ٢ » . . . . وتقع الصعوبة فى أننا حين نحلل القضايا ذات الصبغة المكتوبة والتى ترد فيها مثل هذه الرموز ، فلن نجد لها أجزاء تناظر

التعبيرات المذكورة . وفى بعض الحالات يكون هذا واضحاً تماماً : فلن يزعم أشد الأفلاطونيين حماسة أن « أو » الكاملة موجودة فى السماء ، وأن « الاوات » الموجودة فى هذه الأرض محاكاة ناقصة لذلك النموذج السماوى . أما فى حالة الأعداد فالأمر أقل وضوحاً ، ذلك أن مذاهب فيثاغورس التى بدأت بصوفية رياضية أثرت فى كل فلسفة ورياضة جاءت فيما بعد تأثيراً أعمق مما يظن عادة . فالأعداد كانت أزلية ولا تتبدل كالأجرام السماوية ؛ وكانت الأعداد معقولة ؛ وكان علم العدد مفتاح الكون . وقد ضلل الاعتقاد الأخير الرياضيين ومجلس التربية والتعليم منذ القديم حتى اليوم . وترتب على ذلك أن القول بأن الأعداد رموز لا تعنى شيئاً ، ظهر وكأنه صورة فظيعة من الإلحاد . وفى الوقت الذى كتبت فيه هذا الكتاب كنت أشارك « فريج » الاعتقاد فى الحقيقة الأفلاطونية للأعداد ، التى كنت أتصورها فى خيالى تسكن عالم الوجود الأبدى . وكان ذلك الإيمان مريحاً ، ولكننى هجرته فيما بعد مع الأسف . ولا بد الآن من ذكر شىء عن الخطوات التى أفضت بى إلى هجره .

فى الباب الرابع من هذا الكتاب قلت : « كل لفظة ترد فى جملة يجب أن يكون لها معنى ما » وقلت أيضاً : « وكل ما يمكن أن يكون موضوعاً للفكر ، أو ما يمكن أن يرد فى قضية صادقة أو كاذبة ، أو يمكن أن يعد واحداً ، سأسميه حدا . . . . فالألفاظ : رجل ، لحظة ، عدد ، فصل ، علاقة ، الغول ، أو أى شىء آخر يمكن ذكره ، هى بكل تأكيد حد . وإنكار أن شيئاً ما هو حد يجب أن يكون باطلاً دائماً » . وقد تبين لى أن هذه الطريقة لفهم اللغة خاطئة . فأن نقول إن « اللفظة يجب أن يكون لها معنى ما » — فاللفظة بالطبع ليست تمتمة ، بل شيئاً له استعمال معقول — ليس صحيحاً دائماً ، إذا أخذت العبارة على أن اللفظة تقوم على انفراد منعزلة . والصحيح هو أن اللفظة تساهم فى معنى الجملة التى ترد فيها ، ولكن هذا أمر مختلف عما سبق ذكره .

وكانت أول خطوة فى هذه العملية نظرية الأوصاف . وطبقاً لهذه النظرية

نجد أن فى القضية « سكوت هو مؤلف ويفرلى »[1] ، لا يوجد جزء يناظر « مؤلف ويفرلى » : وتحليل القضية بوجه التقريب هو : « كتب سكوت ويفرلى ، وكل من كتب ويفرلى كان سكوت » أو بوجه أكثر دقة : « دالة القضية س كتب ويفرلى تكافئ س هو سكوت ، صادقة لجميع قيم س » . وقد ألغت هذه النظرية الزعم — الذى نادى به مثلا « مينونج » — بأنه لا بد من وجود فى عالم الوجود أشياء من مثل الجبل الذهبى والمربع المستدير ، ما دمنا نستطيع الكلام عنها ، ولقد كانت القضية « المربع المستدير ليس له وجود » من القضايا الصعبة دائماً ، إذ كان من الطبيعى السؤال : « ما هذا الشىء الذى ليس له وجود ؟ » وأى جواب ممكن كان يظهر أنه يستلزم من بعض الوجوه وجود شىء كالمربع المستدير ، ولو أن هذا الشىء له الخاصية الغريبة وهى عدم الوجود . وقد تجنبت نظرية الأوصاف هذه الصعوبة وغيرها من الصعوبات.

ثم كانت الخطوة التالية إلغاء الفصول ، وهى خطوة اتخذت فى كتاب « مبادئ الرياضيات Principia Mathematica » حيث جاء : « إن الرموز عن الفصول كتلك الرموز الخاصة بالأصناف هى فى نظامنا رموز ناقصة ، فاستخداماتها معرفة ، ولكن من المسلم به أنها فى ذاتها لا تعنى شيئاً ألبتة . . . . وعلى ذلك فالفصول بالحد الذى نستخدمها فيه إنما هى استعمالات رمزية أو لغوية مريحة لا أشياء حقيقية » (المجلد الأول ص ٧١ — ٧٢) . فلما رأينا الأعداد الصحيحة قد عرفت بأنها فصول فصول ، فقد أصبحت هى أيضاً : « مجرد استعمالات رمزية أو لغوية مريحة » . وهكذا مثلا القضية : « ١ + ١ = ٢ » مع شىء من التبسيط تصبح كما يأتى : « ضع دالة القضية « ا ليست ب ، و س هى حـ مهما تكن قيمة س ، تكافئ دائماً س هى ا أو س هى ب » وضع أيضاً دالة القضية « ا هى حـ ، ومهما تكن قيمة س ، س هى حـ ولكنها ليست ا ، تكافئ دائماً س هى ب » . فمهما تكن قيمة حـ فإن الحكم

(١) سير والتر سكوت (١٧٧١ — ١٨٣٢) شاعر وقصصى اسكتلندى ، ومن رواياته ويفرلى Waverley ألفها سنة ١٨١٤ (المترجم) .

بأن إحدى هاتين الدالتين ليست كاذبة دائماً (لقيم مختلفة لـ ا ، ب) يكافئ الحكم بأن الدالة الأخرى ليست كاذبة دائماً . هنا نجد أن العددين ١ ، ٢ قد اختفيا تماماً ، ويمكن تطبيق تحليل مماثل على أى قضية حسابية .

وقد أغرانى الدكتور هوايتهيد ، فى هذه المرحلة ، بهجر نقط المكان ، ولحظات الزمان ، وجسيمات المادة ، واضعاً بدلا منها تركيبات منطقية مؤلفة من الأحداث « Events » وأخيراً ظهر أنه ترتب على ذلك أنه لا شىء من المادة الخام فى العالم لها خواص منطقية سهلة بل كل ما يظهر أن له مثل هذه الخواص فهو مركب تركيباً صناعياً كى تكون له هذه الخواص، لست أعنى أن تقريراتنا الواضحة عن النقط أو اللحظات أو الأعداد ، أو أى شىء آخر نحذفه حين نجزئه كما فعل « أوكام » Occam باطلة ، كل ما فى الأمر أنها تحتاج إلى تأويل يبين أن صورتها اللغوية مضللة ، وأنها حين تحلل تحليلا صحيحاً نجد أن الأشياء الزائفة السابقة لا ذكر لها فيها . خذ مثلا هذه القضية « يتألف الزمان من لحظات » قد تكون عبارة صحيحة وقد لا تكون ، ولكنها على أى الحالين لا تذكر الزمان أو اللحظات . وقد يمكن على وجه التقريب تأويلها كما يأتى : لتكن أى حادثة هى س ، ولنعرف « كمعاصراتها » تلك التى تنتهى بعد أن تبدأ الحادثة ، ولكنها تبدأ قبل أن تنتهى الحادثة ؛ ولنعرف من الحوادث المعاصرة « المعاصرات الابتدائية » لـ س تلك التى ليست متأخرة كلية عن أى معاصرات أخرى لـ س . عندئذ تكون العبارة « يتألف الزمان من لحظات » صحيحة إذا علمت أى حادثة س، فكانت كل حادثة متأخرة كلية عن معاصرة ما س متأخرة كلية من معاصرة ابتدائية ما لـ س . ولا بد من عملية مماثلة من التأويل بالنسبة لمعظم، إن لم يكن لجميع الثوابت المنطقية البحتة .

وهكذا فإن السؤال عن الثوابت المنطقية هل ترد فى قضايا المنطق يصبح سؤالا أكثر صعوبة مما كان يبدو لأول وهلة . وهو سؤال فى الواقع وبالنظر إلى الأشياء كما هى عليه لا يمكن الإجابة عنه جواباً محدداً ، إذ لا يوجد تعريف مضبوط لقولنا « يرد » فى القضية . ومع ذلك فيمكن أن نقول فى هذه المسألة

بعض القول ، فأولا لا توجد أى قضية منطقية يمكن أن تذكر شيئاً خاصا . فهذه العبارة : « إذا كان سقراط إنساناً ، وكان جميع الناس فانين ، إذن سقراط فان » ليست قضية منطقية . والقضية المنطقية التى تكون العبارة السابقة حالة خاصة منها هى : « إذا كانت سـ لها خاصة φ ، وكل ما له خاصة φ فله الخاصة Ψ ، إذن سـ له الخاصة Ψ ، مهما تكن سـ، φ، Ψ » . واللفظة « خاصة » property التى ترد هنا ، تختفى من التعبير الرمزى الصحيح للقضية ، ولكن « إذا — إذن » ، أو ما يقوم مقامها ، تبقى . وبعد بذل أقصى مجهود لاختزال عدد العناصر اللامعرفة فى الحساب التحليلى المنطقى ، سنجد أنفسنا بإزاء عنصرين (على الأقل) يظهر أنه لا غنى عنهما : الأول هو عدم الاتفاق ، والثانى هو الصدق لجميع قيم دالة القضية (ونقصد بعدم اتفاق قضيتين أنهما لا يصدقان معاً) [1] . ولا واحد من هذين العنصرين يظهر أنه ضرورى جدا . وما سبق أن ذكرناه عن « أو » ينطبق كذلك على عدم الاتفاق ، وقد يبدو من التناقض القول بأن العموم جزء من مكونات قضية عامة .

فالثوابت المنطقية ، إذا كان لنا أن نتمكن من ذكر شىء محدد عنها ، فلا بد من دراستها على أنها جزء من اللغة لا على أنها جزء مما تنبئنا عنه اللغة . وبهذه الطريقة يصبح المنطق لغوياً أكثر مما كنت أعتقده عند ما كتبت هذا الكتاب ، وسيظل الأمر صحيحاً من أنه لا يرد من الثوابت فى التعبير اللفظى أو الرمزى للقضايا المنطقية سوى الثوابت المنطقية . ولكن ليس صحيحاً أن هذه الثوابت المنطقية هى أسماء أشياء كما هو المقصود من « سقراط » أن يكون .

وبناء على ذلك ليس تعريف المنطق أو الرياضة سهلا بأية حال إلا بالإضافة إلى مجموعة من المقدمات المعطاة . ولا بد أن يكون للمقدمة المنطقية خصائص معينة يمكن تعريفها . ولا بد أن يكون لها عموم كامل بمعنى أنها لا تذكر أى شىء خاص أو صفة خاصة . ولا بد أن تكون صادقة بحكم صورتها . فإذا

(١) طبقاً لتعريف المؤلف يمكن ترجمة عدم الاتفاق incompatibility بما جاء فى المنطق القديم أى التضاد . (المترجم)

أعطينا مجموعة معينة من المقدمات المنطقية أمكننا تعريف المنطق بالنسبة لهذه المقدمات بمقدار ما تمكننا من البرهان ، ولكن (١) من العسير القول ما الذى يجعل القضية صادقة بحكم صورتها . (٢) من الصعب أن نتبين أى طريق لإثبات أن النظام الناتج من مجموعة معطاة من المقدمات نظام كامل ، بمعنى أنه يحيط بكل شيء نرغب أن يشمله فى القضايا المنطقية . وفيما يختص بهذه النقطة الثانية قد جرت العادة على قبول المنطق والرياضة الجاريين على أنهما من المعطيات ، ثم على البحث عن أقل المقدمات التى يمكن إعادة تركيب هذه الموضوعات منها ، ولكن حين تنشأ شكوك ــ كما قد نشأت ــ خاصة بصحة بعض أجزاء الرياضة ، تتركنا هذه الطريقة فى الظلام .

ويبدو من الواضح أنه لا بد من وجود طريقة ما لتعريف المنطق بغير علاقته بلغة منطقية خاصة . ومن الظاهر أن خاصية المنطق الأساسية هى تلك التى نشير إليها بقولنا : إن القضايا المنطقية صادقة بحكم صورتها . أما مسألة قابلية الإثبات فلا يمكن أن تدخل فى هذه الخاصية ما دامت كل قضية تستنتج من المقدمات فى ظل نظام ، قد تؤخذ هى ذاتها كمقدمة فى ظل نظام آخر . وإذا تعقدت القضية فلن يكون هذا مناسباً ، ولكنه لا يمكن أن يكون مستحيلا ، إن جميع القضايا القابلة للإثبات فى أى نظام منطقى مقبول يجب أن تشترك مع المقدمات خاصية كونها صادقة بحكم صورتها . وجميع القضايا الصادقة بحكم صورتها ينبغى أن يشملها أى منطق كامل . وثمة بعض الكتاب مثل « كارناب » فى كتابه « الإعراب المنطقى للغة » يعالج المشكلة كلها على أنها مسألة اختيار لغوى أكثر مما يمكننى أن أعتقده أن يكون . فكارناب فى كتابه المذكور يستخدم لغتين منطقتين ، إحداهما تسمح ببديهية الضرب وبديهية اللانهاية ، والأخرى لا تسمح بذلك . أستطيع شخصيا اعتبار مثل هذا الأمر على أنه راجع إلى اختيارنا التعسفى . ويبدو لى أن هذه البديهيات إما أن فيها خاصية الصدق الصورى الذى يميز المنطق أو ليس فيها ذلك ، وفى الحالة الأولى يجب أن يشتمل كل منطق على هذه البديهيات ، وفى الحالة الثانية

يجب أن يستبعدها . ومع ذلك فأنا أعترف أننى عاجز عن إعطاء أى بيان واضح بالمقصود من قولهم إن القضية « صادقة بحكم صورتها » . غير أن هذه العبارة على نقصها تشير فيما أعتقد إلى المشكلة التى يجب أن تحل إذا كان لا بد من إيجاد تعريف كامل للمنطق .

وأنتقل أخيراً إلى السؤال عن المتناقضات ومذهب الأصناف types . أما هنرى بوانكاريه الذى لم يعتبر المنطق الرياضى مُعيناً فى الكشف ومن ثَم فهو عقيم ، فقد ابتهج بالمتناقضات وقال : « لم يعد المنطق الرياضى عقيما ، ذلك أنه يُوَلِّد التناقض ! » . ومع ذلك فكل ما فعله المنطق الرياضى هو أن يبين بوضوح أن المتناقضات تلزم عن مقدمات سبق التسليم بها من جميع المناطقة ، وإن تكن الرياضة بريئة منها . ولم تكن جميع المتناقضات جديدة ، إذ أن بعضها يرجع إلى زمان الإغريق .

ولم أذكر فى هذا الكتاب سوى ثلاث متناقضات : متناقضة بورالى فورتى Burali Forti الخاصة بأكبر عدد ترتيبى ، والمتناقضة الخاصة بأكبر عدد أصلى ، ومتناقضتى الخاصة بالفصول التى ليست حدوداً لذاتها (ص ٣٢٣ ، ٣٦٦ ، ١٠١ من الطبقة الإنجليزية) . ويمكن تجاهل ما قيل عن الحلول الممكنة ، ما عدا الملحق ب الخاص بنظرية الأصناف ، وهذه ذاتها ليست إلا تخطيطاً أولياً . وقد كتبت عن المتناقضات الشىء الكثير ، ومع ذلك لا يزال الموضوع محل بحث وخلاف . وأكمل دراسة أعلمها عن هذا الموضوع توجد فى كتاب كارناب : الإعراب المنطقى للغة "Logical Syntax of Language" (طبعة Kegan Paul ١٩٣٧) . وما يقوله عن الموضوع يبدو لى إما صحيحاً وإما بالغ الصعوبة إلى درجة يصعب معها رفضه ، ويصعب الرد عليه فى صفحات قليلة . ولذلك سأقتصر على ذكر بعض ملاحظات عامة .

ويبدو لأول وهلة أن أنواع المتناقضات ثلاثة : الرياضية ، والمنطقية ، وتلك التى قد يشك فى أنها ترجع إلى حيل لغوية قد تكون بسيطة أو معقدة . ويمكن اتخاذ المتناقضات الخاصة بأكبر الأعداد الترتيبية وأكبر الأعداد

الأصلية نماذج على المتناقضات الرياضية المؤكدة .

وأول هذه المتناقضات ، وهى التى ذكرها بورالى فورتى ، هى كما يأتى : فلنرتب جميع الأعداد الترتيبية بحسب مقاديرها ، فيكون آخرها الذى سنسميه ن هو أكبر الأعداد الترتيبية . ولكن عدد جميع الأعداد الترتيبية من ٠ إلى ن هو ن + ١ ، وهذا أكبر من ن . ولا مهرب لنا من هذا الأمر باقتراح أن سلسلة الأعداد الترتيبية ليس لها حد أخير ، إذ فى تلك الحالة كذلك يكون لهذه السلسلة ذاتها عدد ترتيبى أكبر من أى حد فى السلسلة ، أى أكبر من أى عدد ترتيبى .

والمتناقضة الثانية الخاصة بأكبر عدد أصلى لها الفضل بوجه خاص فى الكشف عن الحاجة إلى مذهب للأصناف . ونحن نعلم من الحساب الأولى أن عدد توافقات ن من الأشياء مأخوذاً منها أى عدد فى وقت واحد هو ٢ن ، أى أن فصل ن من الحدود له ٢ن من الفصول الفرعية . ونستطيع إثبات أن هذه القضية تبقى صحيحة حين تكون ن لا متناهية . وقد أثبت «كانتور» أن ٢ن أكبر دائماً من ن . ويترتب على ذلك أنه لا يمكن وجود عدد أصلى هو أكبر الأعداد الأصلية . ومع ذلك فقد كنا نستطيع افتراض أن الفصل المشتمل على كل شىء ففيه أكبر عدد ممكن من الحدود . وما دام عدد فصول الأشياء يفوق عدد الأشياء ، فمن الواضح أن فصول الأشياء ليست أشياء (وسأوضح بعد قليل ماذا تعنى هذه العبارة) .

ومن المتناقضات المنطقية الواضحة تلك التى ناقشناها فى الباب العاشر ؛ وفى المجموعة اللغوية أشهر المتناقضات هى المعروفة باسم « الكاذب » ، والتى وضعها الإغريق . وهى تجرى على النحو الآتى : لنفرض أن شخصاً يقول : « إنى أكذب » ، فإذا كان يكذب ، فإخباره صادق ، فهو إذن لا يكذب ؛ وإذا لم يكن يكذب ، فهو حين يقول إنى أكذب ، فهو يكذب . وهكذا فإن كلا من الفرضين يلزم عنه تناقض .

والمتناقضات المنطقية والرياضية كما قد نتوقع ليست قابلة للتمييز فى الحقيقة .

أما المجموعة اللغوية تبعاً لتفسير رمزى « Ramsey » (*)، فيمكن حلها بما قد نسميه بمعنى واسع الاعتبارات اللغوية . وهذه تتميز عن المجموعة المنطقية بأنها تدخل أفكاراً تجريبية كتلك التى يحكم بها أو يقصدها زيد من الناس . وما دامت هذه الأفكار ليست منطقية ، فمن الممكن التماس حلول تعتمد على شيء آخر خلاف الاعتبارات المنطقية . وهذا ييسر تبسيط نظرية الأصناف إلى حد كبير ، وهى نظرية كما تظهر طبقاً لمناقشة رمزى تقف عن أن تكون غير مقبولة أو صناعية أو مجرد فرض وضع لتجنب التناقض .

والجوهر الفنى لنظرية الأصناف لا يعدو أن يكون على هذا النحو : لتكن دالة قضية « φ س » بحيث تكون جميع قيمها صادقة ، فهناك تعبيرات ليس لنا فيها الحق فى استبدال « س » . خذ مثلا : جميع قيم « إذا كان س إنساناً س فان » صادقة ، واستنتجنا منها « إذا كان سقراط إنساناً ، إذن سقراط فان »؛ ولكننا لا نستطيع أن نستنتج « إذا كان قانون عدم التناقض إنساناً ، إذن قانون عدم التناقض فان » فنظرية الأصناف تعلن أن هذا الترتيب الأخير للألفاظ لا معنى له ، وتعطى قواعد للقيم المسموح بها لـ « س » فى « φ س » . أما فى التفاصيل فثمة صعوبات وتعقيدات ولكن المبدأ العام إنما هو صورة أدق لما اعترف به دائماً . ففى المنطق الأقدم المتعارف عليه جرت العادة على القول بأن مثل هذه الصورة من الألفاظ « الفضيلة مثلثة » لا هى صادقة ولا كاذبة ، ولكن لم تبذل أية محاولة لبلوغ مجموعة من القواعد المحدودة للحكم بأن السلسلة المعطاة من الألفاظ أهى معبرة أم لا . وهذا ما حققته نظرية الأصناف . فمثلا لقد قررت من قبل أن : « فصول الأشياء ليست أشياء » وهذا يعنى : « إذا كانت س حداً فى الفصل ا ، قضية ، وكانت "φ س" قضية ، فإن ا ليست قضية ، بل مجموعة لا معنى لها من الرموز » .

ولا تزال هناك مسائل خلافية فى المنطق الرياضى لم أحاول فى الصفحات السابقة حلها ، وإنما ذكرت فقط تلك الأمور التى كان لها فى نظرى بعض

(*) Ramsey : Foundations of Mathematics, Kegan Paul, 1931, p. 20 ff

التقدم المعين منذ أن كتبت هذا الكتاب . وبوجه عام لا أزال أعتقد أن هذا الكتاب على صواب حيث يختلف مع ما سبق التسليم به ، أما حيث يتفق مع نظريات أقدم فهو عرضة للخطأ . ويبدو لى أن التغييرات المطلوبة فى الفلسفة ترجع فى شطر منها إلى التقدم الفنى للمنطق الرياضى خلال الأعوام الأربعة والثلاثين الأخيرة[1] ، والتى بسطت جهاز الأفكار والقضايا الأصلية، واكتسحت كثيراً من المسميات الظاهرة، مثل الفصول ، والنقط ، واللحظات. صفوة القول ، النتيجة هى نظرة عامة أقل أفلاطونية أو أقل حقيقية على المعنى المدرسى لهذا الاصطلاح . أما إلى أى حد من الممكن الذهاب فى طريق اللفظية فيبقى فى نظرى مسألة بغير حل ، ولكنها سواء أقبلت الحل حلا كاملا أم لا فإنما يمكن البحث فيها بحثاً مستوفى عن طريق المنطق الرياضى .

(١) يشير المؤلف إلى أنه أصدر الطبعة الأولى سنة ١٩٠٣ ، والطبعة الثانية التى كتب فيها هذه المقدمة سنة ١٩٣٧ (المترجم)

تمهيـــد

يحقق هذا الكتاب غرضين : الأول هو الدليل على أن جميع الرياضة البحتة تنفرد بالبحث فى التصورات التى يمكن تعريفها بعبارات تشتمل على عدد قليل جدا من التصورات المنطقية الأساسية ، وأن جميع قضاياها يمكن استخلاصها من عدد قليل جدا من المبادئ المنطقية الأساسية — فهذا هو الذى اضطلعنا به فى الأجزاء من الثانى إلى السابع من هذا المجلد ، وسوف نقيم الحجة على ذلك بالاستدلال الرمزى الدقيق فى المجلد الثانى . وستجد فى البرهان على هذه الدعوى — إذا لم أكن مخطئاً — جميع ما تقدر عليه البراهين الرياضية من يقين وإحكام . ولما كانت هذه الدعوى حديثة جدا بين جمهرة الرياضيين ، ويكاد ينكرها الفلاسفة بالإجماع ، فقد أخذت على عاتقى فى هذا المجلد أن أدافع عن مختلف أجزائها كلما جاءت مناسبة ، ضد النظريات المخالفة مما كان يبدو أنها مسلم بها على نطاق واسع ، أو عسيرة على القول بخلافها . وحاولت كذلك أن أقدم فى لغة بعيدة عن الاصطلاحات الفنية ما أمكن أهم المراحل فى الاستنتاجات التى أثبت فيها هذه الدعوى .

أما الغرض الثانى من هذا الكتاب والذى يشغل الجزء الأول ، فهو تفسير التصورات الأساسية التى تسلم بها الرياضة على أنها لا تقبل التعريف . وهذا عمل فلسفى بحت ، ولا أستطيع أن أثنى على نفسى بأكثر من أنى فتحت باب ميدان واسع للبحث ، وقدمت نموذجاً من الطرق التى يمكن أن نسلكها فى هذا البحث . إن مناقشة اللامعرفات — وهو ما يشغل أهم جانب من المنطق الفلسفى — محاولة لكى نرى بوضوح ، ولكى نجعل غيرنا يرى كذلك بوضوح ، الأشياء « entities » التى نبحثها ، لعل العقل يظفر بذلك الضرب من الألفة بها كما يألف الحمرة أو طعم الأناناس . وحيث نحصل على اللامعرفات ، كما هو الأمر فى حالتنا الحاضرة ، باعتبار أنها آخر بقية ضرورية فى عملية التحليل،

فالغالب من الأسهل معرفة أنه لا بد من وجود مثل هذه الأشياء من أن ندركها بالفعل . فهنا عملية تشبه تلك التى أدت إلى الكشف عن نبتيون ، مع هذا الفارق وهو أن المرحلة الأخيرة — أى البحث بمنظار عقلى عن ذلك الأمر الذى استخلصناه — هى فى الغالب أصعب جانب فى المهمة . فى حالة الفصول لا بد لى من الاعتراف بأننى فشلت فى إدراك أى تصور يحقق الشروط المطلوبة لفكرة الفصل ، وتثبت التناقض الذى ناقشته فى الباب العاشر أن ثمة خطأ ما غير أننى عجزت حتى الآن عن كشفه .

أما المجلد الثانى الذى أسعدنى فيه الحظ بمعاونة الأستاذ هوايتهيد ، فسيكون موجهاً على الإطلاق للرياضيين . سيشتمل على سلاسل من الاستنباطات من مقدمات من المنطق الرمزى ، مارا بالحساب المتناهى واللامتناهى ، إلى الهندسة فى ترتيب شبيه بما اصطنعته فى هذا المجلد ، وسيشتمل كذلك على آراء متعددة مبتكرة أثبت معها طريقة الأستاذ « بيانو » ، مكملة بمنطق العلاقات ، أنها آلة قوية فى البحث الرياضى .

وهذا المجلد الذى يمكن اعتباره إما تعليقاً على المجلد الثانى أو مقدمة له قد قصدت به وجهة الفيلسوف والرياضى على حد سواء ، غير أن بعض أجزائه يهم الفيلسوف أكثر مما يهم الرياضى ، وبعضها الآخر يهم الرياضى أكثر مما يهم الفيلسوف . وأود أن أنصح الرياضيين أن يبدءوا بقراءة الجزء الرابع اللهم إلا إذا كانوا ممن يهتمون بوجه خاص بالمنطق الرمزى ، ولا يرجعون إلى الأجزاء الأولى إلا إذا اقتضت المناسبة . وفيما يلى الأبواب التى يغلب عليها خاصة طابع الفلسفة : الجزء الأول (مع حذف الباب الثانى) . الجزء الثانى ، الأبواب ١١ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ؛ الجزء الثالث ؛ الجزء الرابع بند ٢٠٧ ، والأبواب ٢٦ ، ٢٧ ٣١ ؛ الجزء الخامس ، الأبواب ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣ ؛ الجزء السادس الأبواب ٥٠ ، ٥١ ، ٥٢ ؛ الجزء السابع ، الأبواب ٥٣ ، ٥٤ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٨ . ثم الملحقان الخاصان بالجزء الأول وينبغى قراءتهما معه . أما كتاب الأستاذ « فريج » والذى يسبق فيه إلى حد كبير آرائى ، فقد كنت أجهل

معظمه حين بدأت طبع هذا الكتاب ، حقا قد اطلعت على كتابه فى الحساب المسمى « قوانين الحساب الأساسية » Grundgesetze der Arithmetik ، ولكن نظراً لصعوبة رمزيته الشديدة ، فقد عجزت عن إدراك أهميته أو فهم محتوياته . ورأيت أن الطريقة الوحيدة لإنصاف كتابه بعد أن تأخر بى الوقت هو أن أعرضه فى ملحق خاص ؛ وسيجد القارئ أن بعض النقط التى وردت فى الملحق تختلف عن تلك التى جاءت فى الباب السادس ، وبخاصة البنود ٧١، ٧٣ ، ٧٤ . وقد اكتشفت عن المسائل المناقشة فى هذه الفقرات أخطاء بعد إرسال الأصول إلى المطبعة ، وقد عدلت فى الملاحق هذه الأخطاء وأهمها إنكار وجود الفصل الصفرى ، والمطابقة بين الحد وبين الفصل الذى هو حده الوحيد . وعلى الجملة فإن الموضوعات التى عالجتها من الصعوبة بحيث أشعر بثقة قليلة فى آرائى الحاضرة ، وأعتبر أن نتائجه قد دافعت عنها على أنها أساساً فروض .

ولعل بعض الكلمات القليلة عن أصل هذا الكتاب قد تبين أهمية المسائل المناقشة فيه . فمنذ ست سنوات مضت بدأت بحثاً عن فلسفة الديناميكا ، فقابلتنى هذه الصعوبة وهى أنه حين يتعرض جسم لقوى متعددة ، فلا واحدة من العجلات المكونة تحصل بالفعل ، وإنما فقط العجلة المحصلة والتى لم تكن تلك العجلات أجزاء فيها . وقد نفى هذا الواقع الوهم بتعليل حصول الجزئيات بالجزئيات كما يثبته لأول وهلة قانون الجاذبية . وظهر كذلك أن الصعوبة بالحركة المطلقة لا تقبل الحل على أساس نظرية المكان العلاقية . وانتهى بى الأمر بعد النظر فى هذين السؤالين إلى إعادة فحص مبادئ الهندسة ، ثم إلى فلسفة الاتصال واللانهاية ، ثم إلى المنطق الرمزى ناظراً إلى الكشف عن معنى لفظة «أى» . وأكبر الظن أن ما حصلت عليه فى النهاية خاصا بفلسفة الديناميكا كان ضئيلا وعلة ذلك أن معظم مسائل الديناميكا يظهر لى أنها تجريبية ، وهى لذلك تخرج عن نطاق مثل هذا الكتاب الذى نقدمه ، فكان لا بد من حذف كثير من الأسئلة المهمة جدا ، وخاصة فى الجزئين السادس والسابع ، والتى لعلها كان من الأفضل أن تشرح فى هذه المرحلة لولا خشية سوء الفهم .

وحين نعد الأشياء الفعلية ، أو حين نطبق الهندسة والديناميكا على المكان الفعلى أو المادة الفعلية ، أو حين يطبق الاستدلال الرياضى بأى طريقة أخرى على ما هو موجود ، فإن للاستدلال الذى نستخدمه صورة لا تتوقف على الأشياء التى يطبق عليها من جهة ما هى عليه ، بل من جهة أن لها خواص علمية معينة. وفى الرياضة البحتة لن نضع أبداً الأشياء الموجودة بالفعل فى عالم الوجود موضع البحث ، وإنما فقط الأشياء الفرضية التى لها تلك الخواص العامة التى يتوقف عليها أى استنباط ننظر فيه . وسنعبر دائماً عن هذه الخواص العامة بعبارات من التصورات الأساسية التى أطلقت عليها اسم الثوابت المنطقية . وهكذا فنحن حين نتكلم عن المكان أو الحركة فى الرياضة البحتة ، فليس ما نتكلم عنه هو المكان الفعلى أو الحركة الفعلية كما نعرفهما فى التجربة ، بل شيئاً له تلك الخواص العامة المجردة للمكان أو الحركة مما يستخدم فى الاستدلال المتعلق بالهندسة أو الميكانيكا . ولا محل للسؤال فى الرياضة البحتة عن هذه الخواص أتتعلق فى الواقع بالمكان الفعلى والحركة الفعلية أم لا ، ولذلك فلا محل فى هذا الكتاب لهذا السؤال ، من جهة أنه فى نظرى تجريبى محض ، يبحث عنه فى المعمل أو المرصد . حقا للمناقشات المتصلة بالرياضة البحتة أثر عظيم غير مباشر على مثل تلك الأسئلة التجريبية ، ما دام كثير من الفلاسفة إن لم يكن معظمهم يذهبون إلى أن القول بالمكان والحركة الرياضيين خُلْفٌ ، وهما لذلك مختلفان بالضرورة عن المكان الفعلى والحركة الفعلية ، على حين أنه إذا صحت الآراء المعروضة فى الصفحات التالية فلن يكون ثمة خلفٌ فى المكان والحركة الرياضيين . ولكن تكاد معظم هذه الاعتبارات الخارجة عن الرياضة أن تكون قد استبعدت كلية من هذا الكتاب .

أما موقفى من المسائل الأساسية الفلسفية فى جميع صورها الهامة فهو مستمد من الأستاذ ج . ا . مور Moore ، فقد أخذت عنه الطبيعة غير الوجودية للقضايا (ما عدا تلك التى تحكم بالوجود) ، واستقلالها عن أى ذهن عارف ؛ وكذلك مذهب الكثرة الذى يعتبر العالم سواء عالم الموجودات أم المجردات

entities ، [١] على أنه مركب من عدد لا نهائى من أشياء أو موجودات كل منها له استقلاله ، ويقوم على علاقات مطلقة لا تقبل الرد إلى صفات حدودها أو صفات المجموع الذى يتركب من هذه الحدود . ولقد كنت عاجزاً العجز كله قبل أن أتعلم منه هذه الآراء عن بناء أى فلسفة للحساب ، حتى إذا سلمت بها تحررت على الفور من كثير من الصعوبات التى أظنها عسيرة الحل بغيرها . وفى اعتقادى أن النظريات المذكورة فى السطور السابقة لا غنى عنها لأى فلسفة رياضية مقبولة معتدلة ، وأرجو أن تبين صفحات الكتاب صحة ذلك . ولكنى أترك للقراء الحكم بمدى استخدام الاستدلال لهذه النظريات ، وإلى أى حد يؤيدها . ومقدماتى من الناحية الصورية إنما هى مسلمات ، ولكن الواقع من أنها تبيح للرياضة أن تكون صحيحة ، وهو مالا تفعله معظم الفلسفات ، فهذا ولا شك حجة قوية فى جانبها .

وإنى لمدين فى الرياضة كما هو واضح إلى «جورج كانتور» ، و« بيانو » ولو كان قد تيسر لى الاطلاع على مؤلف الأستاذ « فريج » من قبل لأخذت عنه الشىء الكثير ، ولكن الذى حصل هو أننى اهتديت مستقلا عنه إلى كثير من النتائج التى كان قد أثبتها . وقد عاوننى الأستاذ « هوايتهيد » فى كل مرحلة من مراحل الكتاب معونة ، تضيق العبارة عن وفاء حقها ، بالاقتراح والنقد والتشجيع الصادق ، علاوة على تفضله بقراءة تجارب الكتاب وتعديل عبارات كثيرة فيه . كما أدين للأستاذ « جونسون » بتوجيهات مفيدة . أما الأجزاء الفلسفية من الكتاب فالفضل الكثير فيها يرجع إلى الأستاذ « مور » إلى جانب موقفى العام الذى يقوم مجموع الكتاب على أساسه .

ولقد كان من المستحيل فى محاولة الإحاطة بمثل هذا المجال الواسع تحصيل جميع ما كتب عن هذا الموضوع ، إذ توجد ولا ريب مباحث كثيرة هامة

---

(١) لفظة entity من الألفاظ العسيرة جداً على الترجمة ، ومن الصعب إيجاد مقابل لها فى العربية ، وقد قلنا سابقاً إنها « الأمر » ، ويمكن أن تطلق على الشىء ، أو الموجود بحسب السياق . وسنصطلح على ترجمتها بالشىء والأشياء فيما بعد . (المترجم)

لم أطلع عليها . ولكن حيث لا بد أن يستنفد جهد التفكير والكتابة هذا الوقت الكثير فيبدو أن مثل ذلك الجهل، مهما يكن شيئاً يؤسف له، فلا يمكن تفاديه على الإطلاق .

وسيجد القارئ خلال المناقشة كثيراً من الألفاظ قد عرفت بمعان من الظاهر افتراقها الواسع عن الاستعمال الشائع . وأود أن يعتقد القارئ أن مثل هذا الافتراق لم يكن مجازفة، ولكنني أقدمت عليه فى تباطؤ شديد ، استوجبته الأمور الفلسفية لسببين رئيسيين : الأول أنه كثيراً ما يحصل أن نعتبر فكرتين متصلتين معاً ، ونجد أن اللغة تستعمل اسمين لإحداهما ولا تستعمل للأخرى أى اسم ، فيكون عندئذ من المناسب جداً التمييز بين الاسمين المستعملين عادة كمترادفين ، بأن نحتفظ بأحدهما للفكرة الجارية ، والآخر للمعنى الذى ليس له حتى ذلك الوقت اسم . والسبب الثانى ينشأ من الاختلاف الفلسفى مع وجهات النظر المتسلمة . فحيث تكون صفتان من المفروض عادة أنهما مرتبطتان ارتباطاً لا انفصال فيه ، ولكننا نعتبرهما هنا منفصلتين ، فالاسم الذى كان يطلق على المركب منهما لا بد أن يقصر إما على أحدهما أو الآخر . مثال ذلك أن القضايا تعتبر عادة إما (١) صادقة أو كاذبة (٢) ذهنية . فإذا ذهبنا كما أفعل إلى أن ما هو صادق أو كاذب ليس بوجه عام ذهنيا ، فإننا فى حاجة إلى اسم للصادق أو الكاذب من حيث هو كذلك ، ولا يمكن أن يكون هذا الاسم شيئاً آخر سوى القضية . وفى مثل هذه الحالة لا يكون الافتراق عن الاستعمال تعسفيا بأى حال . أما فيما يختص بالحدود الرياضية ، فقد أدت الضرورة لإثبات النظرية الوجودية فى كل حالة — أى الدليل على وجود أشياء من هذا القبيل — إلى كثير من التعاريف التى تبدو شديدة الاختلاف عن المعانى المرتبطة عادة بالحدود المذكورة . والمثال على ذلك هو تعاريف الأعداد الأصلية، والترتيبية، والمركبة . ففى حالة النوعين الأولين ، وفى حالات أخرى كثيرة ، يؤثر أساساً التعريف على أنه فصل مستمد من مبدأ التجريد ، وذلك لأنه لا يفتح أى باب للشك فيما يختص بالنظرية الوجودية . أما فى كثير من الحالات التى يظهر فيها

الافتراق عن الاستعمال الجارى ، فقد يشك فى أننا لم نفعل ذلك أكثر من إضافة شىء من الضبط لمعنى كان إلى ذلك الوقت مبهماً إبهاماً كثيراً أو قليلاً .

ودفاعى عن نشر كتاب يشتمل على مثل هذا العدد الكثير من الصعوبات غير المحلولة هو أن البحث لم يكشف عن أمل قريب لحل كامل للتناقض الذى ناقشناه فى الباب العاشر ، أو البصر بإدراك أنفذ فى طبيعة الفصول . وإن الكشف المتكرر عن أخطاء فى الحلول ، هذا الكشف الذى أرضانى بعض الوقت ، جعل هذه المشكلات تبدو وكأنها إنما كانت قد اختفت بسبب أى نظريات مقبولة فى الظاهر ، وقد يبرز هذه المشكلات أى تأمل أعمق . لذلك بدا لى أن مجرد ذكر الصعوبات أفضل من الانتظار حتى أصل إلى الاقتناع بحقيقة مذهب ما ، يكاد بطلانه يكون مؤكداً .

الجزء الأول

اللامعرفات فى الرياضة

الباب الأول

تعريف الرياضة البحتة

١ — الرياضة البحتة هى باب جميع القضايا التى صورتها « ق يلزم عنها ك » حيث ق ، ك قضيتان تشتملان على متغير واحد أو جملة متغيرات هى بذاتها فى القضيتين، علماً بأن كلا من ق ، ك لا تشتمل على ثوابت غير الثوابت المنطقية. والثوابت المنطقية هى كل المعانى التى يمكن تعريفها بدلالة اللزوم، وعلاقة الحد بالفصل الذى هو أحد أفراده، ومعنى قولك "مثل"، ومعنى العلاقة، إلى غير ذلك من المعانى التى تدخل فى المعانى العامة للقضايا التى من هذا النوع السالف الذكر، وفضلا عن هذا فإن الرياضة تستخدم معنى هو فى حد ذاته ليس جزءاً من القضايا التى تنظر فيها، ذلك هو الصدق.

٢ — وهذا التعريف للرياضة البحتة هو ولا شك غير مألوف إلى حد ما. ومع ذلك فقد يبدو أنه يمكن تبرير مختلف أجزائه تبريراً دقيقاً هو غايتنا من وضع هذا المؤلف، وسنبين أن كل ما اعتبر فى الماضى داخلا تحت الرياضة البحتة، يدخل تحت هذا التعريف، وأن كل ما يدخل تحت هذا التعريف غير ذلك، فله تلك الخصائص التى تميز الرياضة عادة من غيرها من الدراسات، وإن يك تمييزاً غير واضح المعالم. ونستطيع أن ندعى أن هذا التعريف ليس مجرد حذلقة لغوية باستعمال الألفاظ فى معنى غير مألوف، ولكنه تحليل دقيق للمعانى التى تلزم بصفة لاشعورية تقريباً عن الاستعمال العادى لذلك الاصطلاح. من أجل ذلك سنتبع الطريقة التحليلية؛ ويمكن أن تسمى المشكلة التى نعالجها مشكلة فلسفية: بمعنى أننا نسير من المركب إلى البسيط، ومن ذلك الذى يمكن إثباته، إلى أصوله التى لا يمكن إثباتها؛ ولكن غير قليل من بحوثنا سيختلف من بعض الوجوه عن تلك التى تسمى عادة فلسفية. فبفضل أعمال الرياضيين ذاتهم سنجد أنه فى مكنتنا أن نصل إلى اليقين فى أغلب المسائل

التى نتصدى لها ، وسنجد أن كثيراً مما نقدر على حله منها حلا كاملا قد دخلت فى الماضى فى مختلف الشكوك التقليدية الناشئة عن الصراع الفلسفى. فطبيعة العدد ، واللانهاية ، والمكان ، والزمان ، والحركة ، وطبيعة الاستنتاج الرياضى ذاته ، هى جميعاً مسائل ستجد لها فى هذا الكتاب جواباً يمكن إثباته بيقين رياضى — جواباً هو مع ذلك ردٌّ للمشكلات السابقة إلى مشكلات فى المنطق البحت ، ولن تجد لهذه المشكلات الأخيرة حلا مقبولا فيما يلى من صفحات هذا الكتاب.

٣ — وما برحت فلسفة الرياضيات إلى يومنا هذا موضعَ جدل وغموض وعجز عن التقدم شأنها فى ذلك شأن باقى فروع الفلسفة . ومع أنه كان من المسلم به بصفة عامة أن الرياضة كانت صحيحة بشكل من الأشكال ، إلا أن الفلاسفة قد تنازعوا على حقيقة مدلول القضايا الرياضية ؛ ومع أن شيئاً مّا من هذه القضايا كان صحيحاً فلم يتفق اثنان على كنه هذا الشىء الصحيح ، ولو عُرِف شىء منها ، فإن أحداً لم يعرف ما هو هذا الشىء المعروف . وطالما بقى هذا موضع الشك فيبعد أن يقال إن أية معرفة يقينية ومضبوطة يمكن الحصول عليها فى الرياضة . وهذا ما حدا بالمثاليين أن يميلوا شيئاً فشيئا إلى اعتبار الرياضة معنية بمجرد المظهر . أما التجريبيون فقد اعتبروا كل ما هو رياضى تقريباً لحقيقة من الحقائق المضبوطة التى ليس لديهم ما يقولونه عنها. ولا بد من الاعتراف أن هذه الحالة لم يكن فيها ما يدعو إلى الرضى على الإطلاق . فالفلسفة تسأل الرياضة : ماذا تعنى ؟ وكانت الرياضة فى الماضى عاجزة عن الجواب . وأجابت الفلسفة بإدخال فكرة غريبة كل الغرابة عن الموضوع هى العقل . واليوم تستطيع الرياضة أن تجيب ، على الأقل ، بأن ترد جميع قضاياها إلى بعض المعانى الأساسية فى المنطق . وعند هذه النقطة ينبغى أن يتولى المنطق البحث. وسأحاول أن أبين ما هى المعانى الأساسية التى نحتاج إليها ، وسأثبت بالتفصيل أننا لا نحتاج إلى غيرها فى الرياضيات ، كما سأشير باختصار إلى الصعوبات الفلسفية التى تعترض تحليل هذه المعانى . والبحث الكامل فى هذه الصعوبات سيتطلب رسالة فى المنطق ، وهو ما لن تجده فى الصفحات التالية .

٤ — وإلى وقت قصير كانت هناك صعوبة خاصة بأصول الرياضة . فقد كان يظهر واضحاً أن الرياضة عبارة عن سلسلة من الاستنتاجات ؛ ومع ذلك فالطرق الاستنتاجية الحقة كانت جميعها ، أو غالبيتها ، مما لا يمكن تطبيقه على الرياضة المعروفة الآن .

فنظرية أرسطو فى القياس المنطقى ، بل كذلك المذاهب الحديثة فى المنطق الرمزى ، إما قاصرة من الوجهة النظرية عن الدليل الرياضى ، أو أنها تحتاج إلى صور صناعية من الصيغ يجعل تطبيقها مستحيلا من الناحية العملية . وهذا هو سر قوة وجهة نظر « كانط » ، التى تقول بأن التفكير الرياضى ليس صوريا بالمعنى الدقيق ، لكنه يستخدم دائماً الحدوس ، أى المعرفة الأولية بالمكان والزمان . ولكن بفضل تقدم المنطق الرمزى ، وبخاصة على يدى الأستاذ « بيانو » أمكن نقض هذا الجزء من فلسفة « كانط » نقضاً نهائيا لا يرد . فعشرة أصول للاستنتاج وعشرة مقدمات أخرى ذات طبيعة منطقية عامة (مثل : اللزوم علاقة) تكفى لاستنتاج الرياضة كلها بطريقة صورية مضبوطة . وكل ما يوجد فى الرياضة يمكن تعريفه بعبارة ما هو موجود فى المقدمات العشرين السالفة الذكر . ولا نقصد بالرياضة فى هذا القول مجرد الحساب أو التحليل ، ولكننا نقصد الهندسة أيضاً الأقليدية منها وغير الأقليدية ، والديناميكا النسبية ، وعدداً لا يحصى من الدراسات الأخرى التى لم تولد بعد ، أو التى ما زالت فى مهدها . أما أن جميع الرياضة هى منطق رمزى فمن أعظم كشوف العصر الحاضر . وعند ما نقرر هذه الحقيقة يصبح ما بقى من الأصول الرياضية عبارة عن تحليل للمنطق الرمزى ذاته .

٥ — ولقد كان « ليبنتز » من أشد أنصار النظرية القائلة بأن الرياضة عبارة عن استنباطات من الأصول المنطقية وفق الأصول المنطقية ، فقد كان « ليبنتز » ينادى دائماً بأن البديهيات ينبغى أن تثبت ، وأن كل شىء يجب أن يعرف ، باستثناء عدد قليل من المعانى الأساسية — ولكن « ليبنتز » وقع أخطاء جسيمة عند ما أخذ فى تنفيذ وجهة النظر هذه بالتفصيل ؛ والمعروف الآن أنها صحيحة

بصفة عامة[١] . والسبب فى فشل « ليبنتز » هو المنطق الناقص والاعتقاد بالضرورة المنطقية لهندسة أقليدس . ولكن نظريات أقليدس مثلا لا يمكن استنباطها من مبادئ المنطق وحدها ، وإدراك هذه الحقيقة هو الذى أدى بالفيلسوف « كانط » إلى تجديده فى نظرية المعرفة .

ومنذ نمو الهندسة غير الأقليدية ، وضح أن الرياضة البحتة لا شأن لها بما إذا كانت بديهيات ونظريات أقليدس صحيحة بالنسبة للمكان الفعلى أم لا ، فهذا من شأن الرياضة التطبيقية أن تقرره ، كلما أمكن ذلك ، بالتجربة والمشاهدة . وما تقرره الرياضة البحتة هو أن القضايا الأقليدية تستنبط من بديهيات أقليدس ، أى أنها تقرر لزوماً : فأى مكان له خواص كيت وكيت له أيضاً خواص أخرى كيت وكيت . فالهندسة الأقليدية والهندسة اللاأقليدية كلاهما صحيح على حد سواء من وجهة نظر الرياضة البحتة ، إذ فى كل منهما لا نثبت شيئاً غير اللزوم ؛ وجميع القضايا الخاصة بما هو واقع فعلا مثل المكان الذى نعيش فيه هى من موضوعات العلوم التجريبية أو العلوم التى تقوم على التجربة وليست من موضوعات الرياضة البحتة . وهذه الموضوعات فى الرياضة التطبيقية تنشأ عند ما نعطى واحداً أو أكثر من المتغيرات الداخلة فى قضية من قضايا الرياضة البحتة قيمة ثابتة مـّا تحقق الفرض ، وبذلك نستطيع فعلا أن نقرر الفرض ونتائجه لقيمة المتغير هذه بدلا من مجرد تقرير اللزوم . ونحن نقرر دواماً فى الرياضة أنه إذا صح الحكم ق على أى شىء س أو على أية مجموعة من الأشياء س ، ص ، ط . . فإن حكماً آخر ل يكون صحيحاً على هذه الأشياء ولكننا لا نثبت حكماً عن ق أو ل منفصلا عن هذه الأشياء ، فنحن نقرر علاقة بين الحكمين ق ، ل سأسميها لزوماً صورياً .

٦ — ولا تتميز القضايا الرياضية بأنها تقرر لزوماً فحسب . ولكنها تتميز أيضاً بأنها تحوى « متغيرات » . وفكرة المتغير من أصعب المعانى التى على المنطق أن يعالجها . وعلى الرغم من كثرة مناقشاتنا لها على صفحات هذا الكتاب ،

---

(١) انظر فى هذا الموضوع Couturat, La Lagique de Leibniz, Paris, 1901

فأكبر الظن أن القارئ لن يظفر بنظرية مقبولة عن طبيعة المتغير ، وسأكتفى فى الوقت الحاضر بأن أوضح أن هناك متغيرات فى جميع القضايا الرياضية حتى ولو بدت لأول وهلة خلوا من هذه المتغيرات . وقد يظن البعض أن الحساب الأولى مستثنى من هذه القاعدة ، فقولنا ١ + ١ = ٢ تبدو بأنها لا تحتوى على متغيرات ، ولا تقرر لزوماً . ولكن الواقع ، كما سنبين فى الجزء الثانى — أن المعنى الصحيح لهذه القضية هو «إذا كان س هو الواحد الصحيح وكان ص هو الواحد الصحيح ، وكان س مختلفاً عن ص ، فإن س ، ص هما اثنان » وهذه القضية تحتوى على متغيرات كما أنها تقرر لزوماً ، وسنرى دائماً فى جميع القضايا الرياضية وقوع اللفظين «أى» أو «بعض» ، وهما علامة المتغير واللزوم الصورى . وعلى ذلك يمكن التعبير عن القضية السابقة بالصورة « أى وحدة وأى وحدة أخرى هما معاً وحدتان» ، والقضية النموذجية فى الرياضة هى على الصورة Φ (س ، ص ، ط ، . . . .) يلزم عنها Ψ (س ، ص ، ط ، . . .) مهما كانت قيم س ، ص ، ط ، . . . » حيث Φ (س ، ص ، ط ، . . .) ، Ψ (س ، ص ، ط ، . . .) هما قضيتان لكل مجموعة لقيم س ، ص ، ط ، . . . ولا نقرر أن Φ دائماً صحيحة ، ولا أن Ψ دائماً صحيحة ، ولكننا نقرر أنه فى جميع الحالات التى لا تصدق فيها Φ ، كما فى الحالات التى تصدق فيها ، فإن Ψ تنتج عنها .

ولقد أضفى الاستخدام الرياضى شيئاً من الغموض على الفرق بين المتغير والثابت . فقد جرت العادة مثلا أن نتكلم عن البارامترات على أنها ثوابت إلى حد ما ، وهذا أمر سوف لا نتبعه فى هذا الكتاب . فالثابت يجب أن يكون شيئاً محدداً تحديداً مطلقاً ، شيئاً لا إبهام فيه ألبتة ، فمثلا ١ ، ٢ ، ٣ ، هـ ، ط ، سقراط ، كلها ثوابت . كذلك ، الإنسان ، والجنس البشرى معتبراً كمجموعة فى الماضى والحاضر والمستقبل ثوابت كذلك . والقضية ، واللزوم ، والفصل ، ألخ ثوابت . ولكن قولك ، قضية ، أية قضية ، قضية ما ، فهذه ليست ثوابت لأن هذه العبارات لا تدل على شىء محدد بالذات . وعلى هذا فما نسميه بارامترات

ما هى إلا متغيرات ، خذ مثلا المعادلة ا س + ب ص + حـ = ٠ باعتبارها معادلة خط مستقيم فى المستوى . فقد جرت العادة على الكلام عن س ، ص بأنهما متغيران وعن ا ، ب ، حـ بأنها ثوابت ، ولكن ما لم نكن نعنى خطا واحداً معيناً بالذات مثل الخط المستقيم الخارج من نقطة معينة فى لندن إلى نقطة معينة فى كمبردج فإن ا ، ب ، حـ ليست أعداداً محددة ، ولكنها تدل على أى أعداد ، وإذن فهى متغيرات . ونحن فى الهندسة لا نتكلم عن مستقيم واحد بالذات ولكننا نتكلم عن أى مستقيم ، فنحن نجمع الأزواج س ، ص ، فى فصول فصول ، ونعرف كل فصل بأنه مكون من تلك الأزواج التى لها علاقة ثابتة معينة بمجموعة ثلاثية واحدة (ا ، ب ، حـ) ولكن ا ، ب ، حـ تتغير من فصل إلى فصل ، وبذلك تكون متغيرة .

٧ — وقد جرت العادة فى الرياضة البحتة أن نقصر المتغيرات على فصول معينة ، ففى الحساب مثلا تقوم المتغيرات مقام أعداد . ولكن هذا لا يعنى أكثر من أنها إذا دلت على أعداد فإنها تحقق بعض الصيغ ، أى أن افتراضنا أنها أعداد تلزم عنه الصيغة . فهذا إذن هو ما نقرره ؛ وفى هذه القضية ليس من المهم أن تكون المتغيرات التى نتحدث عنها أعداداً فاللزوم موجود حتى او لم تكن هذه أعداداً ، فالقضية التى تقول « إذا كانت س ، ص أعداداً فإن $(س + ص)^٢ = س^٢ + ص^٢ + ٢س ص$ » تبقى صحيحة إذا وضعنا سقراط وأفلاطون بدلا من س ، ص[1] . حقاً إن كلا من الفرض والنتيجة باطلان فى هذه الحالة ولكن اللزوم سوف يبقى صحيحاً . ونخرج من هذا أنه عند صياغة قضايا الرياضة البحتة صياغة كاملة ، يكون للمتغيرات مجال غير مقيد . فأى شىء يمكن أن يحل محل أى متغير من متغيراتها دون أن يؤثر ذلك فى صحة القضية .

٨ — ونستطيع أن نفهم الآن لماذا يجب أن نقصر الثوابت فى الرياضة على

---

(١) من الضرورى افتراض الجمع والضرب الحسابيين أنهما معرفان (وهو ما يمكن عمله بسهولة) حتى تبقى الصيغة المذكورة مفهومة حين لا يكون س ، ص أعداداً .

الثوابت المنطقية بالمعنى الذى عرفناها به سابقاً ـــ وعملية تحويل الثوابت فى قضية ما إلى متغيرات تؤدى إلى ما يسمى بالتعميم وتعطينا بهذا الاعتبار الماهية الشكلية لقضية جديدة . ويقتصر اهتمام الرياضة البحتة على أنواع القضايا فإذا أثبتنا قضية ق مشتملةعلى ثوابت فقط ، ثم تخيلنا بدل أحد حدودهاحدوداً أخرى على التعاقب ، فالنتيجة بوجه عام أن القضية تكون صحيحة فى بعض الأحيان وباطلة فى البعض الآخر .خذ مثلاً سقراط « إنسان » وحوّل سقراط إلى متغير بأن تقول « س إنسان » فبعض الفروض على س مثل « س إغريقى » تحقق صحة قولك « س إنسان » بحيث تكون « س إغريقى » ينتج عنه أن « س إنسان » وهذا صحيح لجميع قيم س . ولكن هذه العبارة ليست رياضية لأنها تتوقف على طبيعة إغريقى ، وإنسان . وفى الإمكان تغيير هذين أيضاً بأن نقول : إذا كان ا ، ب فصلين ، وكان ا داخلا فى الفصل ب ، فيترتب على ذلك أن « س هى ا » يلزم عنها أن « س هى ب » . وأخيراً ها قد وصلنا إلى قضية فى الرياضة البحتة مشتملة على ثلاثة متغيرات ، وعلى ثوابت هى الفصل ، والدخول فى الفصل ، وتلك المتضمنة فى فكرة اللزوم الصورى بالمتغيرات . وطالما كان هناك حد فى القضية يمكن تحويله إلى متغير ، فإنه يمكن تعميم هذه القضية . وكلما كان ذلك ممكننا فإن من وظيفة الرياضة البحتة أن تقوم به ، وإذا كانت هناك عدة سلاسل من الاستنتاجات لا تختلف إلا فى معانى الرموز بحيث تكون للقضايا المتطابقة رمزيا عدة تفسيرات ، فإن الطريق السليم من الناحية الرياضية هو إيجاد فصل يشمل المعانى التى يمكن أن تأخذها الرموز ثم الحكم بأن الصيغة الجديدة تلزم عن افتراض أن الرموز تنتمى إلى ذلك الفصل، وبهذه الطريقة تتحول الرموز التى كانت تدل على ثوابت إلى متغيرات ، ويحل محلها ثوابت جديدة تتكون من فصول تنتمى إليها الثوابت القديمة . ومثل هذا التعميم هو فى الرياضة من الكثرة بحيث تخطر الأمثلة العديدة على بال كل رياضى ، وسنجد فى هذا الكتاب ما لا حصر له من الأمثلة على ذلك . فكلما كان لمجموعتين من الحدود علاقات متبادلة من نفس النوع فإن الصورة ذاتها من الاستنتاج

تنطبق على كل منهما . فمثلاً العلاقات المتبادلة بين النقط فى الهندسة الأقليدية المستوية هى من نفس نوع العلاقات المتبادلة بين الأعداد المركبة ، ولذلك فإن الهندسة المستوية كفرع من فروع الرياضة البحتة ينبغى ألا تفرق بين النقط أو الأعداد المركبة أو أى مجموعة أخرى من الأشياء لها ذات النوع من العلاقات المتبادلة . ويمكن القول بصفة عامة إن كل فرع من فروع الرياضة يعنى بأى فصل من الأشياء التى لها علاقات متبادلة من نوع معين بالذات وبذلك يصبح الفصل ، كما يصبح الحد المعين المذكور ، متغيراً ؛ أما الثوابت الحقيقية فقط فهى أنواع العلاقات وما يدخل فيها . ونعنى فى هذا المقام بنوع العلاقة ، فصلاً من العلاقات يتميز بما سبق ذكره من التطابق الصورى للاستنتاجات التى يمكن إجراؤها على مختلف حدود ذلك الفصل ، وبذلك يكون نوع العلاقات على الدوام فصلا يمكن تعريفه بدلالة الثوابت المنطقية ، وهذا أمر سيظهر بوضوح أكثر فيما بعد إذا لم يكن قد وضح فعلا[١] . ويمكننا إذن أن نعرف نوع العلاقات بأنه فصل من العلاقات يتميز بخاصية يمكن تعريفها بدلالة الثوابت المنطقية وحدها .

٩ — وينبغى إذن ألا يدخل فى الرياضة البحتة شىء لا يمكن تعريفه فيما خلا الثوابت المنطقية ، وعلى ذلك يجب ألا يدخل فى الرياضة من المقدمات أو القضايا التى لا يمكن إثباتها غير تلك التى تعالج فقط الثوابت المنطقية والمتغيرات . وهذا بالضبط هو الفرق بين الرياضة البحتة والتطبيقية . فالنتائج المترتبة على فرض ما بالنسبة للمتغير والتى قام عليها البرهان بالرياضة البحتة يحكم بها فعلا فى الرياضة التطبيقية على ثابت ما يحقق الفرض المذكور . بذلك تصبح الحدود التى كانت ثابتة متغيرة . ويحتاج دائماً إلى مقدمة جديدة . وهى أن هذا الشىء بالذات يحقق الفرض المذكور . فمثلا الهندسة الأقليدية كفرع من فروع الرياضة البحتة ، تتكون جميعها من قضايا تقوم على هذا الفرض

---

(١) الواحد بالواحد ، والكثير بالواحد ، والمتعدى ، والمتماثل هى أمثلة لأصناف العلاقات التى سنعنى بها فى الغالب .

وهو أن « م مكان أقليدى » فإذا انتقلنا إلى القول بأن « المكان الموجود مكان أقليدى » أمكننا أن نحكم على المكان الموجود بجميع نتائج فروض الهندسة الأقليدية ، حيث أننا قد وضعنا بدلا من المتغير ف هذا الثابت وهو المكان الواقعى ، ولكن هذا يخرجنا من الرياضة البحتة إلى الرياضة التطبيقية .

١٠ – نخرج مما سبق بأن الصلة بين الرياضة والمنطق جد وثيقة . فإن كون جميع الثوابت الرياضية ثوابت منطقية بها تتعلق جميع المقدمات الرياضية فهذا ، فى اعتقادى ، هو معنى ما ذهب إليه الفلاسفة فى قولهم بأن الرياضة أولية . والواقع أنه عند ما نسلم بالجهاز المنطقى فالرياضة حتما تتبعه ، والثوابت المنطقية ذاتها إنما تعرف بسردها لأنها أساسية لدرجة أن الخصائص التى يمكن بها تعريف الفصل منها تفترض مقدماً بعض حدود هذا الفصل .

ولكن من الناحية العملية نجد أن طريقة الكشف عن الثوابت المنطقية هى بتحليل المنطق الرمزى الذى سيكون موضوع الأبواب التالية ، والتمييز بين الرياضة والمنطق أمر اختيارى . وإذا شئنا التمييز بينهما فذلك على النحو الآتى : يتألف المنطق من المقدمات الرياضية بالإضافة إلى جميع القضايا الأخرى التى تعنى فقط بالثوابت المنطقية ، وبالمتغيرات التى لا تحقق التعريف الذى وضعناه للرياضة (بند١) . والرياضة تتكون من جميع نتائج المقدمات السابقة التى تقرر لزوماً صوريا يشتمل على متغيرات بالإضافة إلى بعض تلك المقدمات ذاتها التى تحمل هذا الطابع . وبناء على هذا تكون بعض المقدمات الرياضية مثل مبدأ القياس المنطقى كقولك : « إذا كانت ق تلزم عنها ك وكانت ك تلزم عنها ر فإن ق تلزم عنها ر » هى من الرياضيات ، بينما البعض الآخر مثل « اللزوم علاقة » هى من المنطق وليست من الرياضة . ولولا ما جرى عليه العرف لقلنا : إن الرياضة والمنطق متطابقان ، ولعرفنا كلا منهما بأنه فصل القضايا التى تشتمل فقط على متغيرات وثوابت منطقية . ولكن احترامى للعرف يجعلنى أفضل الإبقاء على التمييز السابق مع اعتقادى بأن بعض القضايا مشتركة بين العلمين .

ومما سبق يدرك القارئ أن هذا الكتاب يحقق غرضين :

الأول : أن يبين أن الرياضة بأكملها تقوم على المنطق الرمزى .

والثانى : أن يكشف على قدر الإمكان عن أصول المنطق الرمزى ذاته .

وسنحاول تحقيق الغرض الأول فى الأجزاء التالية . أما الغرض الثانى فهو موضوع الجزء الأول . وكمقدمة للتحليل الدقيق يجب قبل كل شىء أن نشرح بإيجاز المنطق الرمزى باعتباره مجرد فرع من فروع الرياضة البحتة . وهذا هو موضوع الباب التالى .

الباب الثانى

المنطق الرمزى

١١ ــ المنطق الرمزى أو الصورى ــ وهما اصطلاحان سأستعملهما مترادفين ، هو دراسة مختلف الأنواع العامة للاستنباط . ولقد أطلقت كلمة رمزى على هذه الدراسة لخاصية عرضية ، لأن استخدام الرموز الرياضية فى هذه الدراسة وفى غيرها هو مجرد أمر مناسب من الناحية النظرية لا تمليه طبيعة الأشياء . والقياس المنطقى بجميع أشكاله يتصل بالمنطق الرمزى ، وكان يمكن أن يكون جميع المنطق الرمزى لو أن جميع الاستنباطات كانت قياسية كما افترضت التقاليد المدرسية . ويرجع الفضل إلى الاستدلالات غير القياسية فى أن المنطق الرمزى الحديث ابتداء من « ليبنتز » ومن جاء بعده قد استمد الدافع إلى التقدم . فمنذ نشر « بول » كتابه عن « قوانين الفكر » عام ١٨٥٤ توبعت دراسة الموضوع بنشاط عظيم ووصلت إلى درجة عالية من التقدم الفنى . ومع ذلك فلم تظهر لهذا العلم منفعة للفلسفة أو لفروع الرياضة الأخرى حتى جاء الأستاذ « بيانو » بمناهجه الحديثة فتطور به[١] . ولم يصبح المنطق الرمزى اليوم أساسياً فقط لكل منطقى مشتغل بالفلسفة بل ضروريا كذلك لفهم الرياضة عامة ، وهو لازم حتى لممارسة بعض فروع الرياضة ممارسة ناجحة . وكل الذين خبروا السلاح القوى الذى وضعته الدراية بهذا العلم فى أيدى الباحثين ، يدركون مقدار فائدته العملية . أما وظائفه النظرية فيجب أن نشرحها باختصار فى هذا الباب[٢] .

---

(١) انظر Formulaire de Mathémati que, Turin, 1895 وطبعاته التالية فى السنوات التالية ؛ وكذلك Revue de Mathématique, Vol VII, No 1 (1900)
وسنشير إلى طبعات كتاب Formulaire على هذا النحو F 1895 وهكذا . أما Revue de Mathématique وهى التى كانت فى الأصل Rivista di Matematica فسنشير إليها بهذه الحروف R d M

(٢) فيما يأتى بعد الفكرة العامة ترجع إلى الأستاذ بيانو ، ما عدا فيما يختص بالعلاقات . وحتى فى تلك الحالات التى افترق فيها عن آرائه فإن المشكلات المذكورة قد أوحتها إلى مؤلفاته .

١٢ – والمنطق الرمزى مختص أساساً بالاستدلال بوجه عام [١] ويتميز خاصة عن مختلف فروع الرياضة الخاصة بصفته العامة . فلا الرياضة ، ولا المنطق الرمزي يختص بدراسة العلاقات الخاصة مثل « التقدم الزمانى » ولكن الرياضة مختصة بصفة صريحة بفصل العلاقات ذات الخصائص الصورية للتقدم الزمانى ، وهى الخصائص التى تجتمع فى فكرة الاتصال [٢] . ويمكن أن تعرف الخصائص الصورية للعلاقة بأنها تلك التى يمكن التعبير عنها بالثوابت المنطقية أو هى تلك الخصائص التى وإن حافظت على صورتها ، تسمح للعلاقة أن تتغير بدون أن تنقض الاستدلال الذى نعتبر فيه تلك العلاقة على ضوء المتغير . ولكن المنطق الرمزى بالمعنى الضيق ، وهو المناسب ، لا يبحث فى الاستدلالات الممكنة بالنسبة للعلاقة المتصلة (مثل العلاقات التى تنتج سلسلة متصلة) . وهذا البحث خاص بالرياضة ، ولكنه أخص من أن يكون من جملة دراسات المنطق الرمزى . وما يبحث فيه المنطق الرمزى هو القواعد العامة التى يجرى الاستدلال عليها ، وهو إنما يحتاج إلى تبويب العلاقات أو القضايا من حيث أن هذه القواعد العامة تقدم معانى خاصة . والمعانى الخاصة التى تظهر فى قضايا المنطق الرمزى وفهمها مما يمكن تعريفه بدلالة هذه المعانى فهى الثوابت المنطقية . وعدد الثوابت المنطقية التى لا يمكن تعريفها ليس كثيراً ، وهو فى الواقع لا يعدو الثمانية أو التسعة . وهذه المعانى وحدها هى موضوع الرياضة بأكملها ولا يدخل غيرها فى الحساب أو الهندسة أو الديناميكا النسبية اللهم إلا تلك المعانى التى يمكن تعريفها بدلالة هذه المعانى الثمانية أو التسعة الأصلية . وفى الدراسة الفنية للمنطق الرمزى من المناسب أن نتخذ شيئاً واحداً لا يمكن تعريفه هو فكرة اللزوم الصورى ، مثل قولنا « س إنسان يلزم عنها أن س فان لجميع قيم س » أما القضايا التى تدخل تحت النوع العام « Φ (س) يلزم

---

(١) قد أقول كذلك على الفور أننى لا أميز بين الاستدلال والاستنباط . ويبدو لى أن ما يسمى استقراء فهو إما استنباط خفى ، وإما مجرد طريقة تجعل التخمينات مقبولة .

(٢) انظر فيما بعد الجزء الخامس الباب السادس والثلاثين .

عنها Ψ (س) لجميع قيم س » حيث Φ (س) ، ψ (س) هما بدورهما قضيتان لجميع قيم س . أما تحليل هذه الفكرة من اللزوم الصورى فهى من أصول هذا العلم ولكننا لا نحتاج إليها فى كماله الصورى . وبالإضافة إلى هذه الفكرة نحتاج إلى اللامعرفات الآتية : اللزوم بين القضايا التى لا تشتمل على متغيرات ، وعلاقة الحد بالفصل الذى هو فرد منه ، وفكرة مثل كذا ، وفكرة العلاقة ، والصدق . وبهذه الأفكار يمكن صياغة جميع قضايا المنطق الرمزى .

١٣ — يتكون المنطق الرمزى من ثلاثة أقسام هى الحساب التحليلى للقضايا ، والحساب التحليلى للفصول ، والحساب التحليلى للعلاقات . ويوجد بين القسمين الأول والثانى داخل حدود خاصة ، تواز معين ينشأ كما يأتى : فى أى تعبير رمزى يمكن تفسير الحروف على أنها فصول أو قضايا وحينئذ يمكن استبدال اللزوم الصورى فى الحالة الثانية بعلاقة الاستغراق فى الحالة الأولى . فمثلا من مبدأ القياس المنطقى أنه إذا كانت ا ، ب ، حـ ثلاثة فصول ، وكانت ا داخلة فى ب ، وكانت ب داخلة فى حـ ، فإن ا تكون داخلة فى حـ ، وإذا كانت ا ، ب ، حـ ثلاث قضايا ، وكانت ا يلزم عنها ب ، ب يلزم عنها حـ فإن ا يلزم عنها حـ . ولقد استغلت هذه الثنائية استغلالا كبيراً حتى لقد يبدو أن « بيانو » فى الطبعة الأخيرة من كتابه المسمى Formulaire قد ضحى بالدقة المنطقية فى سبيل الاحتفاظ بهذه الثنائية[1] ، ولكن الواقع أن حساب العلاقات يختلف عن حساب الفصول فى كثير من الوجوه . خذ مثلا « إذا كانت ق ، ك ، ر ثلاث قضايا وكانت ق يلزم عنها ك أو ر ، فإن ق يلزم عنها ك أو ق يلزم عنها ر » وهذه القضية صادقة ولكن مثيلتها كاذبة ، وهى قولك « إذا كانت ا ، ب ، حـ فصولا وكانت ا داخلة فى ب أو حـ ، فإن ا تكون داخلة فى ب ، أو أن ا تكون داخلة فى حـ » . خذ مثلا الشعب الإنجليزى جميعه إما رجال وإما نساء ، ولكنه ليس كله رجالا وليس كله نساء . وقاعدة الثنائية صحيحة عن

---

(١) فى النقط التى لا تصلح فيها الثنائية ، انظر Schroder, op cit , Vol II, Lecture 21

القضايا التى تقرر دخول حد متغير فى فصل ، مثل قولك « س إنسان » بشرط أن يكون اللزوم الداخل فى هذا صوريا ، أى أنه لزوم صحيح لجميع قيم س . ولكن قولك « س إنسان » ليست قضية على الإطلاق ، لأنها لا تحتمل الصدق أو الكذب . ومثل هذه القضايا ليست من اختصاص حساب العلاقات لأنه مختص بالقضايا الحقيقية . وثمة أمثلة أخرى لتوضيح ما سبق : فإذا قلنا إن « س إما أن يكون رجلا أو امرأة » لجميع قيم س ، فإن ذلك إما أن يلزم عنه «س رجل » وإما أن يلزم عنه أن « س امرأة » وهذا صحيح. أما قولك « س إما أن يكون رجلا أو امرأة » يلزم عنها إما أن يكون « س رجلا » لجميع قيم س ، أو أن يكون « س امرأة » لجميع قيم س ، فهو قضية غير صادقة . ومنه يظهر أن اللزوم المشتق من هذا ، والذى هو دائماً إحدى اثنتين فليس صوريا ، مادام ليس صحيحاً لجميع قيم س ؛ إذ قد يختلف اللزوم من واحدة إلى أخرى كلما اختلفت قيم س . وإن التشابه الغريب فى الرموز بين منطق العلاقات ومنطق الفصول لمدعاة للخداع ، ولا بد من أن نقرر أيهما سيكون الأساس عندنا . ولقد دافع المستر « ماكول » McColl ، فى سلسلة هامة من البحوث[١] عن وجهة النظر التى تقول بأن اللزوم والقضايا أساسية أكثر من الفصول والاستغراق . وأنا متفق معه فى هذا الرأى ، إلا أنه يبدو لى أنه غير مقدر تمام التقدير الفرق بين القضية الحقيقية وتلك التى تحتوى على متغير حقيقى ، فانساق مثلا إلى الكلام عن القضايا على أنها تكون صادقة فى بعض الأحيان وكاذبة فى البعض الآخر ، وبطبيعة الحال هذا مستحيل فى حالة القضايا الحقيقية. ولما كانت التفرقة المشار إليها بالغة الأهمية فسنقف عندها قليلا ، قبل المضى فى بحثنا . فقد نقول إن القضية هى أى شىء يحتمل الصدق أو الكذب . وقولك « س إنسان » ليس إذن قضية لأنها لا هى صادقة ولا هى كاذبة . فإذا أخذت

(١) انظر "The Calculus of Equivalent Statement" Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. IX and subsequent volumes; "Symbolic Reasoning" Mind, Jan. 1880. Oct. 1897, and Jan. 1900. "La Logique Symbolique et ses Applications" Bibliothèque du Congrès Internationale de Philosophie Vol. III (Paris 1901) وسوف أقتبس فيما بعد من أعمال هذا المؤتمر مشيراً إلى ذلك باسم « مؤتمر » .

س قيمة ثابتة أيا كانت ، فإن العبارة السابقة تصبح قضية ؛ فكأنها إذن صورة تخطيطية لأى واحد من فصل بأجمعه من القضايا ، وعند ما نقول « س إنسان» يلزم عنها أن يكون « س فانياً لجميع قيم س» فإننا لا نقرر لزوماً واحداً بمفرده ، ولكن فصلا من اللزوم ، فهذه قضية حقة لا يوجد فيها متغير حقيقى ولو أن س تظهر فيها ، إلا أنها تختفى بنفس الطريقة كالمتغير س تحت علامة التكامل فى التكامل المعين فلا تصبح النتيجة دالة للمتغير س . ويميز « بيانو » المتغير الذى يظهر فى هذه الصورة بأنه ظاهرى ما دامت القضية لا تتوقف على المتغير ، بينما فى قولك « س إنسان » هناك قضايا مختلفة لقيم س المختلفة ، والمتغير هو ما أسماه بيانو بالمتغير الحقيقى[1] . وسأتكلم عن القضايا عند ما لا يكون هناك متغير حقيقى . أما إذا كان هناك متغير حقيقى أو أكثر ، وكانت العبارة قضية لجميع قيم المتغير ، فإنى سأسمى العبارة « دالة قضية » . وفى نظرى أن دراسة القضايا الحقة أساسية أكثر من دراسة الفصول ، ولكن دراسة دوال القضايا يبدو كأنها على قدم المساواة مع الفصول ، ويكاد لا يكون بينهما فرق . ولقد اعتبر « بيانو » ، « وماكول » كذلك ، أول الأمر القضايا أساسية أكثر من الفصول ، ولكنه بالتحديد جعل دوال القضايا أولى بالاعتبار من القضايا . ولا يمكن توجيه هذا النقد إلى « شريدر » فقد عالج فى الجزء الثانى من كتابه القضايا الحقة ، وأشار إلى الفروق الصورية بينها وبين الفصول .

ا ــ تحليل القضايا

١٤ ــ يتميز الحساب التحليلى للقضايا بحقيقة أن جميع قضاياه لها فروض ولها نتيجة هى تقرير لزوم مادى ، والفرض عادة من هذه الصورة « ق يلزم عنها ك » إلخ . وهذا يساوى القول (انظر بند ١٦) بأن الحروف التى تقع فى النتيجة هى قضايا ، وعلى ذلك تكون النتائج عبارة عن دوال قضايا صحيحة

(١) انظر كتابه Formulaire ص ٢ .

لجميع القضايا ، ومن المهم ملاحظة أنه مع أن الحروف المستخدمة ترمز إلى متغيرات وأن النتائج صحيحة عند ما تأخذ المتغيرات قيما هى ذاتها قضايا ، فإن هذه القيم ينبغى أن تكون قضايا حقة لا دوال قضايا . فقولك « ف قضية » لا يتحقق إذا وضعنا بدلا من ف «س إنسان» ولكنه يتحقق إذا وضعنا « سقراط إنسان » أو إذا وضعنا « س إنسان » يلزم عنها أن س فان لجميع قيم س » . وبالاختصار يمكن أن نقول إن القضايا الممثلة فى هذا الحساب التحليلى برموز هى متغيرات ، ولكنها لا تشتمل على متغيرات عند ما يراد تحقيق فروض القضية التى يقررها هذا التحليل .

١٥ — فهذا الحساب التحليلى يدرس علاقة اللزوم بين القضايا . ويجب التمييز بين هذه العلاقة وبين علاقة اللزوم الصورى التى تقوم بين دوال القضايا عند ما يلزم عن إحداها الأخرى لجميع قيم المتغير . واللزوم الصورى داخل أيضاً فى هذا التحليل، ولكننا لا ندرسه بصراحة ، فنحن لا ندرس دوال القضايا بصفة عامة ولكننا ندرس بعض دوال القضايا المحددة التى نصادفها فى نظريات حسابنا التحليلى . أما إلى أى حد يمكن تعريف اللزوم الصورى بصفة اللزوم فقط ، أو اللزوم المادى كما قد يسمى ، فهذا سؤال يصعب الإجابة عنه ، وسنبحثه فى الباب الثالث . وأما الفرق بين النوعين فسنوضحه بالمثال الآتى : فالقضية الخامسة لأقليدس تنتج من الرابعة ، فإذا كانت الرابعة صحيحة كانت الخامسة صحيحة كذلك ، وإذا كانت الخامسة باطلة كانت الرابعة باطلة كذلك . فهذا مَثَلٌ على اللزوم المادى لأن كلا من القضيتين ثابت مطلق لا تتوقف فى معناها على تعيين قيمة لمتغير . ولكن كلا من القضيتين تقرر لزوماً صوريا ، فالقضية الرابعة تقرر أنه إذا كان س ، ص مثلثين يحققان شروطاً معينة ، كان س ، ص مثلثين يحققان شروطاً أخرى معينة وأن هذا اللزوم صحيح لجميع قيم س ، ص ، والقضية الخامسة تقرر أنه إذا كان س مثلثاً متساوى الساقين كانت زاويتا قاعدة س متساويتين ، واللزوم الصورى الداخل فى كل من هاتين القضيتين أمرٌ جد مختلف عن اللزوم المادى القائم بين

القضيتين بأكملهما ، ونحن نحتاج إلى كل من هذين المعنيين فى الحساب التحليلى للقضايا ، ولكن دراسة اللزوم المادى هى بصفة خاصة التى تميز هذا الموضوع ، لأن اللزوم الصورى داخل فى كل فرع من فروع الرياضة .

وقد جرت العادة أن يخلط بين هذين النوعين من اللزوم فى كتب المنطق ، وكثيراً ما كان الكلام فيها يتناول النوع الصورى فى حين يكون واضحاً أننا أمام النوع المادى وحده . فمثلا عند ما نقول : « سقراط إنسان ، إذن سقراط فان » نشعر بأن سقراط متغير ، وأنه نموذج الإنسانية وأن أى إنسان مكانه كان يؤدى الغرض ذاته ، فإذا وضعنا « سقراط إنسان يلزم عنها أن سقراط فان » بدلا من كلمة إذن التى تدل على صدق الفرض والنتيجة ، فإنه يتضح على الفور أننا يمكننا أن نضع أى إنسان بل وأى كائن آخر بدلا من سقراط . وواضح أنه ولو أن النص الظاهر هو عن اللزوم المادى فإن المفهوم هو لزوم صورى . وأننا لا بد من أن نبذل مجهوداً إذا أريد أن نقصر خيالنا على اللزوم المادى .

١٦ — ومن المستحيل وضع تعريف اللزوم . فإذا قلنا إن ق يلزم عنها ك، فإن كانت ق صحيحة فإن ك صحيحة، أى أن صدق ق يلزم عنه صدق ك . كذلك إذا كانت ق باطلة كانت ك باطلة، أى أن بطلان ق يلزم عنه بطلان ك . أى أن الصدق والكذب يؤدى بنا إلى لزوم جديد ولا يعطينا تعريفاً للزوم. وإذا كانت ق يلزم عنها ك فإن كليهما يكون صادقاً ، أو كليهما يكون كاذباً ، أو أن ق كاذبة ، ك صادقة . ومن المستحيل أن تكون ك كاذبة، ق صادقة بل يلزم أن تكون ك صادقة أو ق كاذبة . وفى الواقع أن الحكم بأن ك صادقة أو ق كاذبة يساوى تماماً الحكم بأن « ق يلزم عنها ك ». ولما كان التكافؤ معناه اللزوم المتبادل فسيبقى اللزوم أساسياً، ولا يمكن تعريفه بعبارة الانفصال ؛ ومن جهة أخرى فإن الانفصال يمكن تعريفه بعبارة اللزوم كما سيأتى ذكره حالا. ويترتب على التكافؤ المشار إليه أن من كل قضيتين لا بد أن واحدة تلزم عنها الأخرى ، وأن القضايا الكاذبة يلزم عنها جميع القضايا ، وأن القضايا الصادقة تلزم عن جميع القضايا ؛ ولكن هذه نتائج يجب إثباتها .

أما مقدمات موضوعنا فتقتصر على البحث فى قواعد الاستدلال .

ومما هو جدير بالملاحظة أنه ولو أن اللزوم لا يمكن تعريفه ، إلا أن القضية يمكن تعريفها . فكل قضية يلزم عنها نفسها ، وما هو ليس بقضية لا يلزم عنه شىء . وعلى هذا فقولك « ق قضية » يكافئ قولك «ق يلزم عنها ق» ويمكن استخدام هذا التكافؤ فى تعريف القضايا . ولما كان المعنى الرياضى للتعريف مختلفاً اختلافاً بيناً عما جرى عليه عرف الفلاسفة ، يحسن أن يلاحظ أنه فى المعنى الرياضى يقال إن دالة قضايا قد عرفت عند ما نقرر أنها مكافئة (أى يلزم عنها أو تلزم عن) لدالة قضية يكون قد سبق التسليم بعدم إمكان تعريفها أو قد سبق تعريفها بدلالة ما لا يمكن تعريفه ، أما تعريف الأشياء التى ليست دوال قضايا فيشتق من الوسائل التى سنشرحها عند الكلام عن الفصول والعلاقات .

١٧ — نحن إذن لا نحتاج إلى مسلمات لا يمكن تعريفها فى الحساب التحليلى إلا هذين النوعين من اللزوم؛ ولكن ينبغى أن نذكر أن اللزوم الصورى فكرة معقدة ينبغى علينا أن نحللها — أما عن هذين اللذين سلمنا بهما دون تعريف ، فإننا نحتاج فى أمرهما إلى قضايا لا يمكن إثباتها، ولم أنجح إلى الآن فى تخفيض عددها إلى أقل من عشرة . وبعض هذه التى لا يمكن إثباتها يجب أن تكون موجودة ، وبعض القضايا مثل القياس يجب أن تدخل ضمن هذا العدد ، ما دام البرهان غير ممكن بدونها ، أما غير ذلك فليس مقطوعاً به ، هل هو مما لا يمكن إثباته أو مما لم يثبت بعد . وينبغى أن نتذكر أن الطريقة المتبعة فى فرض بديهية ما بأنها باطلة ، ثم استنباط نتائج من هذا الفرض ، وهى الطريقة التى نجحت نجاحاً عظيماً فى بديهية التوازى ، ليست دائماً فى متناول أيدينا ؛ ذلك أن جميع بديهياتنا هى مبادئ الاستنباط ، فإذا كانت هذه المبادئ صحيحة ، فإن النتائج التى يظهر أنها تترتب عن استخدام عكس هذه المبادئ لن تترتب حقيقة . ولذا فإن الحجج التى تنشأ عن افتراض بطلان بديهية تكون عرضة لمغالطات خاصة . ومن كل هذا يبدو أن عدد القضايا التى

لا يمكن إثباتها قد تخفض أكثر من ذلك . وفيما يختص ببعض هذه القضايا فليس عندى من سبب لاعتبارها غير قابلة للإثبات إلا أنها بقيت حتى الآن بغير إثبات .

١٨ — والبديهيات العشر هى (١) إذا كانت ق يلزم عنها ك ، فإن ق يلزم عنها ك ، أو فى صيغة أخرى : مهما كانت ق ، ك فإن « ق يلزم عنها ك » قضية . (٢) إذا كانت ق يلزم عنها ك ، فإن ق يلزم عنها ق ، وفى صيغة أخرى كل ما يلزم عنه شىء فهو قضية . (٣) إذا كانت ق يلزم عنها ك فإن ك يلزم عنها ك ، وفى صيغة أخرى كل ما يلزم عن شىء فهو قضية . (٤) المقدم الحقيقى فى اللزوم يمكن إسقاطه ، والحكم بالتالى . وهذه قاعدة لا يمكن التعبير عنها بالرمز الصورى ، وتوضح القصور الأساسى للصورية. وسأرجع إلى بحث هذه المسألة فيما بعد . ومن المستحسن ، قبل أن نمضى بعيداً ، أن نعرف الحكم المقترن عن قضيتين أو ما يعرف بحاصل ضربهما المنطقى. وهذا تعريف مصطنع جداً ويوضح الفرق العظيم بين التعريفات الرياضية والتعريفات الفلسفية . وهذا التعريف هو : إذا كانت ق يلزم عنها ق ، وإذا كانت ك يلزم عنها ك ، فإن ق ك (حاصل ضرب ق ، ك المنطقى) معناها أنه إذا كانت ق يلزم عنها أن ك يلزم عنها ر كانت ر صحيحة . وفى صيغة أخرى إذا كانت ق ، ك قضيتين فإن حكمهما المقترن يكافئ قولنا ، كل قضية اقترانية صادقة متى كانت بحيث أن القضية الأولى يلزم عنها أن الثانية تلزم عن الأولى. ونحن لا نستطيع وضع التعريف فى هذه الصورة المختصرة مع الاحتفاظ بصحة الوضع الصورى . لأن قولنا أن « ق ، ك قضيتان » هو فى حد ذاته حاصل الضرب المنطقى لكل من « ق قضية » ، « ك قضية» . ونذكر الآن نصوص المبادئ الستة الأساسية للاستنباط ، ونظراً لأهميتها فقد أطلق على كل منها اسم خاص ، وجميعها فيما عدا الأخيرة منها ، يجدها القارئ فى مؤلف « بيانو » . (٥) إذا كانت ق يلزم عنها ق ، وكانت ك يلزم عنها ك ، فإن ق ك يلزم عنها ق . ويسمى هذا بـ « التبسيط » ، وينص على مجرد أن الحكم المقترن عن

قضيتين يلزم عنه الحكم بأولى القضيتين . (٦) إذا كانت ق يلزم عنها ك وك يلزم عنها ر ، فإن ق يلزم عنها ر . ويسمى هذا بالقياس. (٧) إذا كانت ك يلزم عنها ك و ر يلزم عنها ر ،وكانت ق يلزم عنها أن ك يلزم عنها ر ، فإن ق ك يلزم عنها ر ، وتسمى هذه قاعدة الاستيراد . ونجد فرضاً حاصل ضرب ثلاث قضايا ، ولكن هذا يمكن تعريفه بطبيعة الحال بدلالة حاصل ضرب اثنتين فقط . وتنص القاعدة على أنه إذا كانت ق يلزم عنها أن ك يلزم عنها ر ،فإن ر تلزم عن الحكم الاقترانى عن القضيتين ق ، ك فمثلا : إذا طرقتُ باب فلانة فإذا كانت فى داخل المنزل فسيسمح لى بالدخول ، يلزم عنه أنه إذا طرقت باب فلانة وهى فى المنزل دخلت . (٨) إذا كانت ق يلزم عنها ق وكانت ك يلزم عنها ك ،حينئذ إذا كانت ق ك يلزم عنهار ، فإن ق يلزم عنها أن ك يلزم عنهار . وهذه عكس القاعدة السابقة وتسمى التصدير وتوضح هذه القاعدة بالمثال السابق معكوساً (٩) إذا كانت ق يلزم عنها ك ، وكانت ق يلزم عنها ر ، فإن ق يلزم عنها ك ر ، وفى صيغة أخرى كل قضية يلزم عنها كل من قضيتين فإنهما معاً يلزمان عنها . وتسمى هذه بقاعدة التركيب (١٠) إذا كانت ق يلزم عنها ق ،وكانت ك يلزم عنها ك ، فإن « ق يلزم عنها ك ، يلزم عنها ق » يلزم عنها ق ،وتسمى هذه قاعدة الاختزال . وهذه أقل وضوحاً بذاتها مما سبقها من القواعد ولكنها تكافئ كثيراً من القضايا الواضحة بذاتها غير أنى أفضلها عليها لأنها تقوم صراحة على اللزوم كسابقاتها ، ولها أيضاً نفس الصفة المنطقية . وإذا تذكرنا أن « ق يلزم عنها ك » تكافئ « ك أوْ لا ق » أمكننا أن نقنع أنفسنا بصحة القاعدة السابقة لأن «ق يلزم عنها ك يلزم عنها ق » تكافئ قولك « ق أو بطلان «ك أو لا ق » أو قولك « ق أو ق أو لا ك » أى ق . ولكن هذه الطريقة فى الاقتناع بأن قاعدة الاختزال صحيحة تحتاج إلى كثير من قواعد المنطق التى لم تثبت للآن ، والتى لا يمكن إثباتها إلا بردها أو اختزالها إلى مكافئ لها . والقاعدة ذات فائدة بصفة خاصة فى النفى ، فبدونها وباستخدام القواعد التسع الأولى يمكننا إثبات قانون التناقض .

فيمكننا إثبات : إذا كانت ق ، ك قضيتين فإن ق يلزم عنها لا ـ لا ق» ، وأن « ق يلزم عنها لا ك » مكافئة إلى « ك يلزم عنها لا ق » ومكافئة أيضاً إلى لا ق ك ، وأن « ق يلزم عنها ك» يلزم عنها لا ك « يلزم عنها لا ك يلزم عنها لا ق » ، وأن ق يلزم عنها أن لا ق يلزم عنها ق ، وأن لا ق تكافىء ق يلزم عنها لا ق، وأن « ق يلزم عنها لا ك » تكافىء لا ـ لا ق يلزم عنها لا ك » ولكن بدون قاعدة الاختزال أو ما يعادلها لا يمكننا إثبات (إلى حد علمى على الأقل) أن ق أو لا ق يلزم أن تكون صحيحة (قانون الثالث المرفوع)، وأن أية قضية تكافئ سلب قضية أخرى ، وأن نفى لا ـ لا ـ ق يلزم عنها ق »، وأن « لا ق يلزم عنها لا ك» يلزم عنها أن « ق يلزم عنها ك » ، وأن لا ق يلزم عنها ق » يلزم عنها ق ، أو أن « ق يلزم عنها ك» يلزم عنها « ك أو لا ق » . وكل من هذه الفروض يكافىء قاعدة الاختزال ويمكن أن تحل محلها . وبعض هذه الفروض وبخاصة قاعدة الثالث المرفوع وسلب السلب يبدو أنها أكثر وضوحاً فى ذاتها . ولكن عند ما نأتى إلى تعريف الانفصال والسلب بعبارة اللزوم سنرى أن هذه البساطة السطحية تختفى وأن قاعدة الاختزال ــ على الأقل لأغراض صورية ــ أبسط من كل بديلاتها . ولهذا السبب فقد أبقيت عليها بين مقدماتى مفضلا إياها على كثير من القضايا العادية والبادية الوضوح فى ظاهرها .

١٩ ــ ويعرف الانفصال أو الجمع المنطقى كما يأتى « ق أو ك » تكافىء ق يلزم عنها « ك يلزم عنها ك» . ومن السهل أن نقتنع بهذا التكافؤ إذا تذكرنا أن كل قضية كاذبة يلزم عنها كل قضية أخرى لأنه إذا كانت ق كاذبة فإن ق يلزم عنها ك، وإذن « إذا كانت ق يلزم عنها ك» يلزم عنها ك ترتب على ذلك أن ك صادقة . ولكن هذه الحجة تستخدم مرة أخرى قواعد لم تثبت للآن وقد وضعت لمجرد توضيح التعريف بالمترتب ، ومن هذا التعريف وبواسطة قاعدة الاختزال يمكننا أن نثبت أن « ق أو ك » تكافىء « ك أو ق » . وهناك بديل لهذا التعريف مشتق مما سبق وهو « أى قضية تلزم عن ق وتلزم عن ك فهى صادقة » أو فى صيغة أخرى « ق تلزم عنها ل، ك يلزم عنها ل معا يلزم

عنهما ل مهما كانت ل » . ومن هذا نسير نحو تعريف السلب : لاو تكافئ الحكم بأن و يلزم عنها جميع القضايا أى أن « م يلزم عنها م » يلزم عنها «و يلزم عنها م » مهما كانت م . ومن هذه النقطة نستطيع أن نثبت قوانين التناقض ، والثالث المرفوع ، وسلب السلب كما نستطيع أن نضع جميع الخواص الصورية للضرب والجمع المنطقيين وقوانين الترابط ، وتبادل الحدود ، وتبادل الأطراف ، وبذلك يكون منطق القضايا كاملا .

وقد يعترض الفلاسفة على التعريف السابق والسلب بحجة أننا نعنى بهذه الأفكار شيئاً آخر جد مختلف عما يدل عليه التعريف ، وأن المكافئات الواردة فى التعاريف هى فى الواقع وحقيقة الأمر قضايا تدل على معنى وليست مجرد إشارات إلى الطريقة التى ستستخدم فيها الرموز . وهذا الاعتراض فى رأيى له ما يبرره لو أننا ادعينا أن الكلام السابق هو تحليل فلسفى حقيقى للموضوع . ولكن إذا كان المقصود هو استيفاء الشكل ، فإن كل تكافؤ تظهر فى أحد طرفيه فكرة ولا تظهر فى الطرف الآخر يمكن استخدامه كتعريف ، وأن ميزة أن نضع أمام أعيننا بناء صورياً محكماً هو أنه يقدم المادة التى سيستخدمها التحليل الفلسفى فى شكل أكثر تحديداً مما لو كان الأمر غير ذلك . ومن أجل ذلك فسنرجئ نقد طريقة المنطق الصورى حتى نفرغ من هذه العجالة القصيرة .

ب ــ الحساب التحليلى للفصول

٢٠ ــ إن عدد القضايا الأولية الجديدة فى هذا الحساب التحليلى أقل كثيراً ــ وتكفى قضيتان على ما يبدو ــ ولكن الصعوبات أكثر فى عرض الأفكار الكامنة فى الرمزية عرضاً يستخدم طريقة غير رمزية . وسنؤجل هذه الصعوبات كلما أمكن ذلك إلى فصول تالية ، أما الآن فسأجتهد أن أعرض الموضوع عرضاً بسيطاً لا التواء فيه بقدر الإمكان .

ويمكن أن نبنى الحساب التحليلى للفصول على اعتبار أن فكرة الفصل

أساسية ، وكذلك فكرة علاقة فرد في فصل بالفصل ذاته . وقد اتبع الأستاذ « بيانو » هذه الطريقة ، وهي تفضل من الناحية الفلسفية ، تلك الطريقة الأخرى التي وجدتُ أنها أطوع من الناحية الصورية وفي هذا المنهج سنظل نعتبر العلاقة (وسنرمز لهذه العلاقة بالرمز ϵ على طريقة بيانو) بين الفرد والفصل الذي ينتمي إليه أساسية ، أي العلاقة بين سقراط والجنس البشري والتي نعبر عنها بقولنا سقراط إنسان ، وبالإضافة إلى هذا سنسلم بفكرة دالة القضية وبفكرة مثل على أنهما مما لا يمكن تعريفهما . وهذه هي الأفكار الثلاثة التي تميز الحساب التحليلي للفصول . وسنأتي على توضيح كل منها .

٢١ — كان « بيانو » أول من أصر على التمييز بين ϵ ، والعلاقة بين الكل والجزء بين الفصول ، وهذا أمر عظيم الفائدة في البناء الفني بأجمعه وفي جميع التطبيقات الرياضية . فقد اختلطت العلاقتان في النظرية المدرسية للقياس وفي كل منطق رمزي سابق ، اللهم إلا في أعمال « فريجه » والفرق هو كالفرق بين علاقة الفرد بالنوع وعلاقة النوع بالجنس ، أوكالفرق بين علاقة سقراط لفصل الإغريق وعلاقة الإغريق بالناس . وسأتوسع في طبيعة هذا الفرق من الناحية الفلسفية عند ما أحلل تحليلا دقيقاً طبيعة الفصول . ويكفي الآن أن نعرف أن العلاقة بين الكل والجزء علاقة متعدية ، في حين أن ϵ ليست كذلك . ومثال ذلك : سقراط إنسان ، والناس فصل ، أما سقراط فليس فصلاً . ويجب أن نميز بين الفصل وبين فصل التصور أو المحمول الذي يجب أن يعرف به ، بمعنى أن الناس فصل ، ولكن الإنسان هو فصل التصور . ويجب اعتبار العلاقة ϵ قائمة بين سقراط والناس مجتمعين لا بين سقراط والإنسان . وسنرجع إلى الكلام عن هذا في الباب السادس . ويذهب « بيانو » إلى أنه يمكننا التعبير عن جميع دوال القضايا التي تحتوي على متغير واحد على الصورة « س هي ا » حيث ا فصل ثابت ، ولكننا سنجد ما يوجب الشك في وجهة النظر هذه .

٢٢ — والفكرة الأساسية التالية هي فكرة دالة القضية . ودوال القضايا تظهر في الحساب التحليلي للقضايا ، ولكن كل واحدة منها تعرف حينئذ عند ما

يحين استخدامها . ولذلك لا نحتاج هناك إلى المعنى العام ، وهو الذى نحتاج إليه صراحة عند الكلام على الحساب التحليلى للفصول . ولا يحتاج « بيانو » إلى هذا المعنى العام نظراً لتسليمه بأن الصورة « س هى ا » صورة عامة للمتغير الواحد ، وأنه من المستطاع تعميم هذه الصورة إلى أكثر من متغير واحد . فيجب أن نستبعد ما سلم به بيانو وندخل فكرة دالة القضية . ونستطيع أن نفسر — ولكننا لا نُعَرِّف — هذه الفكرة بما يأتى : Φ س دالة قضية ، إذا كانت لكل قيمة من قيم س ، Φ س قضية تتعين إذا تعينت س . ولذلك فإن « س إنسان » دالة قضية. وفى أى قضية مهما تعقدت — بحيث لا تحتوى على متغيرات حقيقية — يمكننا أن نتخيل أن أحد الحدود — غير الأفعال والصفات — قد وضع مكانه حد آخر . فبدلا من « سقراط إنسان » يمكننا أن نضع « أفلاطون إنسان » « العدد ٢ إنسان » وهكذا . وبذلك نحصل على قضايا متتالية كلها متفقة إلا فى الحد الواحد المتغير . فإذا وضعنا س بدلا من الحد المتغير لكانت « س إنسان » تعبر عن نوع هذه القضايا كلها. ودالة القضية بصفة عامة قد تكون صادقة لبعض قيم المتغير وكاذبة لبعض القيم الأخرى . والحالات التى تكون فيها دالة القضية صادقة لجميع قيم المتغير هى إلى حد علمى الحالات التى تعبر عن اللزوم مثل قولك « س إنسان يلزم عنها س فان » ولكنى لا أجد سبباً أولياً إلى القول بأنه لا توجد دوال قضايا أخرى صادقة لجميع قيم المتغير .

٢٣ — وهذا يصل بنا إلى فكرة مثل : فقيم س التى تجعل دالة قضية س صادقة هى كجذور المعادلة — والواقع أن هذه الأخيرة حالة خاصة من الأولى — ونبحث جميع قيم س التى هى مثل أن تكون Φ (س) صادقة ، وهذه القيم بصفة عامة تكون فصلا ، وفى الواقع يمكن تعريف الفصل بأنه جميع الحدود التى تحقق دالة قضية ما . وهذا النص يحتاج إلى بعض التحديد ، ولو أنى لم أستطع الكشف بالضبط عن ماهية هذا التحديد ؛ وهذا ناتج من تناقض معين سأبحثه بالتفصيل فى مرحلة تالية (الباب العاشر) — والأسباب التى تحملنا على تعريف الفصل بهذه الطريقة هى أننا محتاجون إلى أن نهيئ لفكرة الفصل

الصفرى وهو ما يمنعنا من أن نعرف الفصل بأنه الحد الذى لحدود أخرى معه العلاقة ع ، وأننا نرغب أن يكون فى مكنتنا تعريف الفصول بواسطة العلاقات أى أن جميع الحدود التى لها مع حدود أخرى العلاقة ع تكون فصلا . وهذه الحالات تحتاج إلى دوال قضايا معقدة بعض الشيء .

٢٤ — وبالنسبة لهذه المعانى الثلاث الأساسية نحتاج إلى قضيتين . وتنص الأولى على أنه إذا كانت س داخلة فى الحدود التى تحقق دالة قضية Φ س كانت Φ س صادقة . وتنص الثانية على أنه إذا كانت Φ س ، Ψ س قضيتين متكافئتين لجميع قيم س ، كان فصل السينات الذى هو بحيث تكون [1] Φ س صحيحة مطابقاً لفصل السينات الذى هو بحيث تكون Ψ س صحيحة . ونعرف التطابق الحاصل هنا بما يأتى : س تطابق ص إذا كانت ص داخلة فى كل فصل تنتمى إليه س . وفى عبارة أخرى إذا كانت « س هى ف » يلزم عنها أن « ص هى و » لجميع قيم و . ومما تجدر ملاحظته أن القضية الأولية ذاتها تميل إلى تحديد وجهة النظر إلى الفصول ، فليس حتما أن يتطابق فصلا تصور إذا تطابقت ماصدقاتهما . فالإنسان وذو الرجلين وعارى الريش ليسا متطابقين بأى حال ، ولا كذلك العدد الزوجى الأول والعدد الصحيح الواقع بين ١ ، ٣ فهذه فصول تصورات . وإذا أردنا أن تكون بديهيتنا صحيحة فلا ينبغى أن ننصرف إلى هذه عند ما نتكلم عن الفصول بل ينبغى أن تكون عنايتنا بالمجموعات الفعلية للحدود ، لا بالتصور الدال على هذه المجموعة ، وهذا أساسى للغاية من الناحية الرياضية . خذ مثلا مسألة تعيين عدد التوافيق التى يمكن تكوينها من مجموعة معلومة من الحدود بأخذ أى عدد منها فى كل مرة ، أى عدد الفصول الداخلة فى فصل معلوم . فإذا كان للفصول المختلفة الماصدقات ذاتها لأصبحت هذه المسألة غير معينة بالمرة . ولا شك أن الاستعمال المألوف هو أن الفصل يحدد

---

(١) «بحيث تكون » هى الفكرة التى عبرنا عنها بقولنا مثل ، والاصطلاح بالانجليزية هو such that والمقصود أن العبارة الرمزية حين نريد أن نحققها فى الواقع أى أن تكون وجودية وهناك فرق بين القضية الكلامية sentential ، وبين القضية الوجودية existential (المترجم)

تماماً عند ما تعرف جميع حدوده . ويظهر من هذا أن وجهة النظر الماصدقية هي بشكل ما وجهة نظر أساسية للمنطق الرمزى والرياضيات . والبديهية السابقة تعبر عن الحاجة إلى هذه الفكرة ، ولكننا لا نستخدم البديهية ذاتها إلا عند الكلام عن الحساب ، أو على الأقل لا نحتاج إليها إذا أردنا التمييز بين تساوى الفصول المبنى على الاستغراق المتبادل وبين تساوى الفصول المبنى على تطابق الأفراد ، فالأمران مختلفان جدا من الناحية الصورية . فالأولى قد أتينا على تعريفها ؛ أما تساوى ا ، ب فيعرف بتكافؤ « س هى ا » ، « س هى ب » لجميع قيم س .

٢٥ — وأغلب قضايا الحساب التحليلى للفصول يمكن استنباطها بسهولة من قضايا الحساب التحليلى للقضايا . فحاصل الضرب المنطقى للفصلين ا ، ب أو الجزء المشترك بينهما هو فصل السينات التى يكون لها حاصل الضرب المنطقى للقضيتين « س هى ا » ، « س هى ب » صادقاً ، وبالمثل يمكن تعريف حاصل الجمع المنطقى لفصلين (ا أو ب) وسلب الفصل (لا — ا) ومن حاصل الضرب والجمع المنطقيين لفصل فصول تدخل فكرة جديدة . فإذا كانت م فصل فصول فإن حاصل ضربها المنطقى هو فصل الحدود التى تنتمى إلى كل فصل من فصول م ، أى فصل الحدود س التى هى مثل « و هى م » يلزم عنها « س هى و » لجميع قيم و . أما حاصل الجمع المنطقى فهو الفصل المنطوى فى كل فصل داخل فى كل فصل من فصول ك أى فصل الحدود س من مثل : إذا كانت « و هى م » يلزم عنها أن « و داخلة فى الفصل حـ » لجميع قيم و فإنه لجميع قيم حـ تكون س هى حـ . ونقول إن الفصل ا داخل فى الفصل ب إذا كانت « س هى ا » يلزم عنها أن « س هى ب » لجميع قيم س . وبالطريقة السابقة يمكن تعريف حاصل الضرب وحاصل الجمع المنطقيين لفصل من القضايا . ومن الأفكار الهامة أيضاً فكرة « وجود » الفصل ، وهى لفظة يجب أن يفهم منها ما يفهم عادة بالوجود فى الفلسفة . فالفصل يقال إنه موجود إذا كان له حد واحد على الأقل ، أما التعريف الصورى فهو كما يأتى : ا فصل موجود عند ما

وعند ما فقط تكون أى قضية صادقة بشرط « س هى ا » يلزم عنها دائماً . وينبغى أن يكون مفهوماً أن القضية المستلزمة يجب أن تكون قضية حقة لا دالة قضية بالنسبة إلى س ، والفصل ا يكون موجوداً إذا كان حاصل الجمع المنطقى لجميع القضايا التى من النوع « س هى ا » صادقة ، أى عند ما لا تكون جميع هذه القضايا كاذبة . ومن المهم أن نفهم بوضوح الكيفية التى يمكن بها الحصول على قضايا الحساب التحليلى للفصول من قضايا الحساب التحليلى للقضايا . خذ القياس الآتى مثلا :

« ق يلزم عنها ك » و « ك يلزم عنها ر » يلزم عنها « ق يلزم عنها ر » وضع « س هى ا » ، « س هى ب » ، « س هى حـ » بدلا من ق ، ك ، ر حيث س تأخذ قيمة معينة ليس من المهم أن نقرر ما هى هذه القيمة . فإننا نرى أنه إذا كان لقيمة س هذه : « س هى ا » يلزم عنها أن تكون س هى ب ، وأن س هى ب يلزم عنها أن تكون س هى حـ ، فإن س هى ا يلزم عنها أن تكون س هى حـ . ولما كانت قيمة س غير ذات موضوع أمكن تغيير س فنجد أنه إذا كانت ا داخلة فى ب ، وكانت ب داخلة فى حـ ، فإن ا تكون داخلة فى حـ ؛ وهذا هو فصل القياس . وإنما ينبغى أن نكون على جانب عظيم من الحذر فى استخدام هذه الطريقة إذا أردنا أن ننجح فى الابتعاد عن مواطن الزلل . ولعله من المفيد فى هذه المناسبة أن نبحث اختلاف وجهات النظر الذى قام بين « شريدر » و « ماكول » . فشريدر يقول إنه إذا كانت ق ، ك ، ر قضايا فإن « ق ك يلزم عنها ر » تكافىء الانفصال « ق يلزم عنها س » أو « ك يلزم عنها س » . ويسلم « ماكول » بأن الانفصال يلزم عنه القضية الأخرى ، ولكنه ينكر اللزوم العكسى . والسبب فى اختلاف وجهات النظر هو أن « شريدر » يتكلم عن القضايا واللزوم المادى ، بينما يتكلم « ماكول » عن دوال القضايا واللزوم الصورى . ويمكن توضيح صدق القاعدة السابقة بالنسبة للقضايا بالطريقة التالية . إذا كانت ق ك يلزم عنها ر فإنه لو كانت ق أو ك كاذبة فإن الكاذبة منهما يلزم عنها ر ، لأن القضية الكاذبة يلزم عنها جميع القضايا .

أما إذا كانت كل من ق ، ك صادقة ، فإن ق ك تكون صادقة ، وعندئذ تكون ر صادقة وفى هذه الحالة ق يلزم عنها ر ، و ك يلزم عنها ر ، لأن القضايا الصادقة تلزم عن كل قضية . فنى أى حالة فإن واحدة على الأقل من القضيتين ق ، ك يلزم عنها ر (هذا ليس إثباتاً بل توضيحاً) ويعترض «ماكول» فيقول : نفرض أن ق ، ك متناقضتان بالتبادل ، وأن ر هى القضية الصفر فتكون « ق ك يلزم عنها ر» فى حين أن ق لايلزم عنها ر وكذلك ك لايلزم عنها ر . فنحن هنا نتكلم عن دوال القضايا وعن اللزوم الصورى فيقال إن دالة قضية صفر عند ما تكون باطلة لجميع قيم س . ويسمى فصل السينات الذى يحقق الدالة بالفصل الصفرى ، من حيث هو فى الواقع فصل بلا حدود وسنرمز للفصل أو الدالة بالرمز ٨ على طريقة بيانو ، فإذا وضعنا ٨ بدلا من ر ، ووضعنا Φ س بدلا من ق ، ووضعنا لا Φ س بدلا من ك حيث Φ س أية دالة قضية ، فإن ق ك باطلة لجميع قيم س . وعلى ذلك يلزم عنها ٨ . ولكن الواقع أن Φ س ليست دائماً باطلة ولا لا ـ Φ س دائماً باطلة ، ولا يمكن لأيهما أن يلزم عنها إذن ٨ دائماً ، وعلى ذلك فالصيغة السابقة يمكن تفسيرها تفسيراً صحيحاً فى حالة الحساب التحليلى للقضايا فقط ، ولكنها غير صحيحة فى الحساب التحليلى للفصول . ويمكن توضيح ذلك بسهولة بما يأتى :

لتكن Φ س ، Ψ (س) ، X س ثلاث دوال قضايا ، فيكون Φ س . Ψ (س) يلزم عنها لجميع قيم س أن Φ س يلزم عنها ٨ (س) أو أن Ψ س يلزم عنها X س لجميع قيم س وهذا الانفصال هو ما سأسميه الانفصال المتغير تمييزاً له عن الانفصال الثابت . فنى الحالة الأولى هناك حالات يكون فيها أحد الاحتمالين صادقاً ، وهناك حالات أخرى يكون فيها الاحتمال الآخر صادقاً أما فى حالة الانفصال الثابت فإن أحد الاحتمالين (ولو أننا لم نقرر أيهما) صادق على الدوام ، وعند ما تكون هناك اتصالات بالنسبة إلى دوال القضايا فإنه يمكن تحويلها إلى أحكام فى الحساب التحليلى للفصول ، وذلك فقط فى الحالات التى يكون فيها الانفصال ثابتاً . وهذا أمر هام فى حد ذاته ومفيد فى دلالته . ويمكن

النظر إلى هذا الموضوع بطريقة أخرى : فى قولنا إذا كانتϕ س . ψ س يلزم عنها χ س فإنه إما أن ϕ س يلزم عنها χ س ، أو ψ س يلزم عنها χ س. واللزوم المرموز له بـ « إذا كانت » و « فإنه » لزوم صورى ، بينما اللزومان الفرعيان ما ديان . ولذلك فإن اللزومين الفرعيين لا يؤديان إلى دخول فصل فى آخر ، وهو ما لا ينتج إلا عن اللزوم الصورى .

والقوانين الصورية للجمع والضرب والتكرار والسلب هى بعينها للفصول والقضايا . وينص قانون التكرار على أنه لا يتغير شىء عند ما نضيف فصلا إلى نفسه أو نضربه فى نفسه ، وبالمثل بالنسبة للقضية . والجديد فى الحساب التحليلى للفصول هو فكرة الفصل الصفرى ، أو الفصل الذى لا حدود له . ويمكن تعريف هذا بأنه فصل الحدود التى تدخل فى كل فصل ، أو بأنه الفصل الداخل فى كل فصل ، أو بأنه الفصل Λ الذى هو مثل أن يجعل دالة القضية « س هى Λ » كاذبة لجميع قيم س ، أو بأنه فصل السينات التى تحقق أى دالة قضايا ϕ س بشرط أن تكون كاذبة لجميع قيم س . ومن السهل أن نرى أن جميع هذه التعاريف متكافئة .

٢٦ — وهناك بعض النقط التى تنشأ بالنسبة إلى نظرية التطابق . فقد عرفنا تطابق حدين عند ما يكون الثانى داخلا فى كل فصل يدخل فيه الأول . ومن السهل أن نرى أن هذا التعريف متماثل ، وأن التطابق متعد ومنعكس (أى أنه إذا كان س ، ص متطابقين ، وكان ص ، ط متطابقين فإن س ، ط متطابقين ، ومهما كانت س فإن س تطابق س) . ويعرف الاختلاف بأنه سلب التطابق . فإذا كانت س أى حد فمن اللازم أن نفرق بين س وبين الفصل الذى حده الوحيد هو س . ويمكن تعريف هذا بأنه فصل الحدود التى تطابق س . ولقد اكتشف « بيانو » ضرورة هذه التفرقة التى تنشأ أصلا من الاعتبارات الشكلية البحتة ، وسنعود للكلام عنها فيما بعد . وعلى ذلك ففصل الأعداد الأولية الزوجية لا ينبغى أن يؤخذ مطابقاً للعدد ٢ ، وفصل الأعداد التى هى مجموع ١ ، ٢ لا ينبغى أن يؤخذ مطابقاً للعدد ٣ . وسنتكلم فى الباب السادس عن الفرق من الناحية الفلسفية .

حـ - الحساب التحليلى للعلاقات

٢٧ - دراسة الحساب التحليلى للعلاقات أحدث من دراسة موضوع الحساب التحليلى للفصول . وكان « بيرس »[١] Pierce أول من تقدم الموضوع على يديه ، ولو أننا نجد إشارات طفيفة إليه فى أعمال «ديمورجان» [٢] De Morgan. وإن نظرة دقيقة فى الاستدلال الرياضى - كما سيتضح لنا خلال هذا المؤلف - لتكشف عن أن أنواع العلاقات هى المادة التى نبحث فيها ، وإن حجب سوء التعبير هذه الحقيقة . ومن ذلك يتضح أن منطق العلاقات أوثق صلة بالرياضة من منطق الفصول أو القضايا ، وأنه لا يمكن التعبير عن الحقائق الرياضية تعبيراً صحيحاً من الناحية النظرية إلا باستخدام منطق العلاقات . ولقد أدرك كل من « بيرس » و« شريدر » أهمية هذا الموضوع ، وإن تكن طرقهما مع الأسف لم تُبْنَ على نهج « بيانو » ، بل بنيت مع بعض التعديل على المنطق الرمزى القديم منتهجين فى ذلك نهج « بول » فجاءت طرائقهما صعبة معقدة ، واستحالت معها عمليا أكثر التطبيقات التى كان ينبغى إجراؤها . وفوق عيوب المنطق الرمزى القديم فقد عانت تلك الطريقة نقصا فنيا - ولسنا نبحث الآن فيما إذا كان هذا من الوجهة الفلسفية أو لا - ويرجع هذا النقص إلى أن «بيرس» «وشريدر» يعتبران العلاقة على أنها أساسا فصل أزواج ، وهذا يقتضى استخدام قوانين معقدة للجمع إذا أردنا البحث فى العلاقات الفردية . ويحتمل أن تكون وجهة النظر هذه نتيجة لخطأ فلسفى ، فقد جرت العادة دائما على اعتبار قضايا العلاقات أقل فى إطلاقها من فصول القضايا - (أو القضايا الحملية التى تختلط عادة

---

(١) انظر بوجه خاص مقالاته عن جبر المنطق فى American Journal of Mathematics, Vols III and IV وقد عالج شريدر فى إطناب طرائق بيرس - انظر المرجع السابق - المجلد الثالث .

(٢) انظر Cam. Phil., Trans. Vol. X. "On the Syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations". CF. ib. Vol. IX, p. 104; also his Formal Logic (London 1847), p. 50.

بفصل القضايا) وقد أدى هذا الميل إلى اعتبار العلاقات نوعا من الفصول . وكيفما كان الأمر فقد توصلت إلى رأى مخالف عن العلاقات ساعدنى فى الوصول إليه صديقى «مور»[١] الذى يعتنق الرأى الفلسفى المخالف . وسواء أكانت الطريقة الجديدة أصح من الناحية الفلسفية أم لا فإن الثابت أنها أكثر ملاءمة وأمضى سلاحا كأداة للكشف فى الرياضة الفعلية[٢] .

٢٨ — وإذا كانت ع ترمز للعلاقة فإن سہ ع صہ تعبر عن دالة القضية أى « سہ لها العلاقة ع مع صہ » . ونحتاج إلى قضية أولية ، أى لا يمكن إثباتها ، مضمونها أن سہ ، صہ قضية لجميع قيم سہ ، صہ ، وبعد ذلك يتحتم علينا النظر فى الفصول الآتية : فصل الحدود التى لها العلاقة ع مع حداً أو آخر ، ونسمى هذا فصل المتعلقات بها بالنسبة إلى ع وفصل الحدود التى لحد أو آخر العلاقة ع معها ؛ وسنسمى هذا بفصل المتعلقات . فإذا كانت ع تعبر عن الأبوة مثلا فإن المتعلق به هو الآباء والمتعلق هو الأبناء . كذلك علينا أن ننظر فيما يقابل تلك من فصول بالنسبة لحدود خاصة أو لفصول من حدود ، ومثال ذلك قولك أولاد كيت وكيت ، أو أولاد أهل القاهرة . وإن نظرتنا هذه إلى العلاقة من جهة المفهوم تؤدى إلى أنه قد يكون للعلاقتين نفس الماصدق دون أن تكونا منطبقتين . ويقال إن علاقتين ع ، عَ متساويتان أو متكافئتان أو أن لهما نفس الماصدق عندما تكون سہ ع صہ يلزم عنها وتلزم عن سہ عَ صہ لجميع قيم سہ ، صہ . ولكننا لا نحتاج هنا إلى قضية أولية كما احتجنا لها فى حالة الفصول كى نصل إلى علاقة محددة عندما يكون الماصدق محدداً ، ويمكننا أن نضع مكان العلاقة ع حاصل الجمع أو الضرب المنطقى لفصل العلاقات الذى يكافئ ع أى بتقرير بعض أو كل هذه العلاقات ، ويكون هذا مطابقاً لحاصل الضرب أو الجمع المنطقى لفصل العلاقات الذى يكافئ عَ إذا كانت عَ تكافئ ع . ونستخدم هنا تطابق فصلين ، وهو ما ينتج من القضية الأولية عن تطابق

---

(١) انظر مقالته « طبيعة الحكم » فى مجلة Mind, N.S. No. 30.

(٢) انظر مقالتى فى مجلة R. d. M. Vol. No. 2. والأعداد التالية .

الفصول ، لنصل إلى تطابق علاقتين ؛ وهى طريقة مّا كان يمكن تطبيقهاعلى الفصول ذاتها دون الدوران فى حلقة مفرغة .

والقضية الأولية بالنسبة للعلاقات هى أن كل علاقة لها عكس ، أى إذا كانت ع علاقة مّا فإنه توجد علاقة عَ بحيث أن سہ ع صہ تكافئ سہ عَ صہ لجميع قيم سہ ، صہ . وسنرمز لعكس ع بالرمز عّ على طريقة شريدر ، فعلاقات أكبر وأصغر ، وقبل وبعد ، التى تلزم عنها وتلزم عن ، هى علاقات متعاكسة بالتبادل . وقد يكون العكس هو نفس العلاقة الأصلية كالحال فى التطابق والاختلاف والتساوى واللاتساوى، وتسمى مثل هذه العلاقات متماثلة . أما إذا كان العكس غير متفق مع العلاقة الأصلية ، كالحال بين أكبر وأصغر ، فإن العلاقة تسمى لامتماثلة ، وسأسميها غير متماثلة فيما بين ذلك من حالات .

وأهم القضايا الأولية فى هذا الموضوع هى التى تنص على أنه توجد علاقة بين أى حدين لا تقوم بين أى حدين آخرين . وهذا يشبه القاعدة التى تقول إن أى حد هو الفرد الوحيد فى فصل ما . ولكن بينما أمكن إثبات هذا بالنظر إلى الفصول من جهة الماصدق ، فإن هذا المبدأ إلى حد علمى مما لا يمكن إثباته . وهنا تظهر فائدة النظر فى العلاقات من جهة الماصدق ولكن هناك اعتبارات أخرى ترجح هذه المزية . وعند النظر إلى العلاقات من جهة المفهوم قد يبدو من المحتمل ألا تكون القاعدة المذكورة صحيحة ألبتة . ولكننا بصفة عامة سنسلم بأنه إذا أخذنا أى زوجين من الحدود فقد تكون هناك دالة قضية صادقة بالنسبة لهذين الحدين ، ولكنها كاذبة بالنسبة إلى زوجين آخرين من الحدود . فإذا سلمنا بهذا فإنه يمكن استنباط القاعدة السابقة باعتبار حاصل الضرب المنطقى لجميع العلاقات التى تقوم بين الزوج الأول من الحدود ، وبذلك يمكن أن نضع بدلا من القاعدة السابقة ، القاعدة الآتية التى تكافئها : إذا كانت سہ ع صہ تستلزم سہَ ع صہَ مهما كانت ع ما دامت تدل على علاقة ، فإن سہ تطابق سہَ ، صہ تطابق صہَ . ولكن هذا يدخلنا فى صعوبة منطقية لم تعرض لنا للآن ، وهى المتغير فى المجال المقيد ، لأنه ما لم تكن ع تدل على

علاقة ، فإن س ع ص ليست قضية على الإطلاق صادقة أو كاذبة ؛ ولذلك يبدو أن ع فيما يظهر لا يمكن أن تأخذ «جميع» القيم ، ولكنها تأخذ فقط القيم التي هي علاقات . وسأعود إلى بحث هذه النقطة مستقبلا .

٢٩ — ومن الفروض الأخرى التي نحتاج إليها هي أن سلب العلاقة فهو علاقة ، وأن حاصل الضرب المنطقي لفصل من العلاقات (أي تقريرها جميعاً في آن واحد) فهو علاقة. كذلك «حاصل الضرب النسبي لعلاقتين يجب أن يكون علاقة . ويعرف حاصل الضرب النسبي للعلاقتين ع ، ح بأنه العلاقة التي تقوم بين س ، ع كلما وجد حد ص يكون للحد س معه العلاقة ع ويكون له مع ع العلاقة ح . فمثلا علاقة الجدة عن الأم بالنسبة لحفيده هي حاصل الضرب النسبي للأب والأم . وعلاقة الجدة عن الأب لحفيدها هي حاصل الضرب النسبي للأم والأب. وعلاقة الجد للحفيد هي حاصل الضرب النسبي للوالد والوالدة . وحاصل الضرب النسبي ، كما يظهر من هذه الأمثلة ، ليس تبادلياً ولا يخضع عادة لقانون التكرار . وحاصل الضرب النسبي فكرة ذات أهمية كبيرة . ولما كان لا يخضع لقوانين التكرار فإنه يؤدي إلى قوى العلاقات . فمربع العلاقة بين الوالد والطفل هي علاقة الجد بالحفيد وهكذا. وقد بحث «بيرس» «وشريدر» أيضاً في حاصل الجمع النسبي للعلاقتين ع ، ح وهي العلاقة التي تقوم بين س ، ط إذا توفر الشرط الآتي : إذا كانت ص أي حد آخر فإما أن تكون س لها العلاقة ع مع ص أو تكون ص لها العلاقة ع مع ط. وهذه فكرة معقدة لم تسنح لي فرصة استخدامها وقد أدخلت فقط للإبقاء على قاعدة الثنائية بين الجمع والضرب . ولهذه القاعدة سحر فني خاص عندما ننظر إلى الموضوع على أنه فرع مستقل من فروع الرياضة . ولكن عند النظر على ضوء الأصول الرياضية يصبح مبدأ الثنائية هذا عديم الأهمية من الناحية الفلسفية .

٣٠ — ولا نحتاج في الرياضة ، إلى حد علمي ، إلا إلى قضيتين أوليتين أخريين ، الأولى أن اللزوم المادي علاقة ، والثانية أن ∈ (علاقة الحد

بالفصل الذى ينتمى إليه)علاقة [١] . وبعد ذلك يمكننا بناء جميع الرياضة دون الحاجة إلى فروض أو مسلمات جديدة لا يمكن تعريفها . وهناك بعض قضايا فى منطق العلاقات تستحق الذكر نظراً لأهميتها ، ولاحتمال أن يتسرب الشك فى إمكان إثباتها إثباتاً صورياً . فإذا كان و ، ف فصلين أيا كانا فإنه توجد علاقة ع بحيث يكون الحكم بها بين أى حدين س ، ص مكافئاً للحكم بأن س داخلة فى الفصل و وأن ص داخلة فى الفصل ف. وإذا كان و أى فصل غير صفرى ، فهناك علاقة قائمة بينه وبين جميع حدوده ، وهى علاقة لا تقوم بين أى زوج آخر من الحدود . وإذا كانت ع أية علاقة ، وكان و أى فصل داخل فى فصل المتعلقات بها بالنسبة لـ ع فإنه توجد علاقة فصل المتعلقات بها هو الفصل و وهى تكافئ ع فى ذلك الفصل ، وهذه العلاقة هى ذات العلاقة مثل ع حيثما تقوم ، ولكنها ذات ميدان أكثر تقييداً منها (ونستخدم هنا «الميدان» كرادف لفصل المتعلق به) وسنبنى الموضوع من الآن بناء فنياً ، وسنبحث بعض الأنواع الخاصة من العلاقات ، وسينجم عن هذا فروع خاصة من الرياضة .

د – المنطق الرمزى لبيانو

٣١ – ولما كان الكثير من العجالة السابقة عن المنطق الرمزى ، هو من وحى «بيانو» ، فإنه من المرغوب فيه أن نبحث أعماله بصراحة ، مبررين بالحجة النقاط التى نخالف رأيه فيها .

ونحن نتفق مع الأستاذ «بيانو» [٢] فيما ذهب إليه من أن الأمر متروك لاختيارنا إلى حدما فى اختيار معانى المنطق الرمزى التى نسلم بأنها لا تقبل

---

(١) هناك صعوبة فيما يختص بهذه القضية الأولية نوقشت فى بند ٥٣ ، ٩٤ فيما بعد .

(٢) E. g. F. 1901, p. 6; F. 1897, Part 1, pp. 62-3.

التعريف ، والقضايا التى نسلم بأنه لا تقبل الإثبات . ولكن من المهم أن نثبت جميع العلاقات المتبادلة بين معانى المنطق البسيطة ، وأن نفحص النتيجة المترتبة على اتخاذ أفكار متعددة على أنها غير قابلة للتعريف . وهنا يلزم أن ندرك أن التعريف فى الرياضة لا يعنى ، كالحال فى الفلسفة ، تحليلا للفكرة التى يراد تعريفها إلى أفكار أولية ، فهذه الطريقة لا تنطبق على كل حال إلا فى حالة التصورات ، ومن الممكن فى الرياضة أن نعرف حدوداً ليست بتصورات[1] . كذلك كثير من المعانى يعرفها المنطق الرمزى ولا يمكن تعريفها تعريفاً فلسفياً لأنها بسيطة وغير قابلة للتحليل . ويتكون التعريف الرياضى من الإشارة إلى علاقة ثابتة لحد ثابت ، وهى علاقة لا يمكن أن تقوم إلا مع حد واحد ، ويعرف هذا الحد حينئذ بواسطة العلاقة الثابتة والحد الثابت . ويمكن توضيح وجه الخلاف بين هذا التعريف وبين التعريف الفلسفى بأن التعريف الرياضى لا يشير إلى الحد المقصود ، وأن النظرة الفلسفية وحدها هى التى تكشف عن هذا الحد من بين سائر الحدود ، ومرجع هذا إلى أن الحد يعرف بتصور يدل عليه بدون لبس أو إبهام ، لا بذكر الحد المدلول عليه . أما ما نقصده بالدلالة ، وبالطرق المختلفة لهذه الدلالة فيجب أن يقبل على أنه من الأفكار الأولية فى أى منطق رمزى[2] . وفى هذا يبدو أن الترتيب الذى اتبعناه ليس فيه مجال لأى اختيار .

٣٢ – ولكى نجعل لكلامنا صفة محدودة سنفحص رأياً من آراء الأستاذ «بيانو» فى الموضوع . ولقد عدل فى كتاباته الأخيرة[3] عن محاولته أن تميز بوضوح بعض الآراء أو القضايا على أنها أولية ، ولعل هذا يرجع إلى إدراكه أن مثل هذا التمييز لابد أن يكون اختيارياً . ولكن يبدو أن هذا التمييز نافع فى زيادة التحديد ، وفى بيان أن مجموعة معينة من الآراء والقضايا الأولية كافية . ولما كان الأمر كذلك فلا ينبغى العدول عن هذا التمييز ، بل يجب أن نقدم عليه بكافة

---

(١) انظر الباب الرابع .

(٢) انظر الباب الخامس .

(٣) F. 1901 and R. d. M. Vol. VIII, No. 1 (1900).

الطرق الممكنة . ومن أجل ذلك سأشرح فيما يلى أحد الآراء الأولى للأستاذ بيانو ، وذلك الذى نشر عام ١٨٩٧ .[١]

والأفكار الأصلية التى يبدأ منها بيانو هى الآتية : الفصل ، علاقة الفرد بالفصل الذى هو عضو فيه ، فكرة الحد ، اللزوم الذى تحتوى فيه كلا القضيتين على المتغيرات ذاتها أى اللزوم الصورى ، إثبات قضيتين معاً ، فكرة التعريف، سلب القضية . ومن هذه الأفكار بالإضافة إلى تقسيم القضية المركبة إلى أجزاء ، يزعم «بيانو» أنه يبنى كل المنطق الرمزى بواسطة بعض القضايا الأصلية . ولنفحص الآن هذا الاستنتاج بصفة عامة .

ونلاحظ بادئ ذى بدء أن فكرة الحكم الاقترانى بقضيتين، قد يبدو عند النظرة الأولى ، غير كاف لأن يؤخذ على أنه فكرة أصلية . ومع أن هذه الفكرة يمكن تعميمها خطوة خطوة إلى الحكم الاقترانى لأى عدد محدود من القضايا ، إلا أن هذا ليس هو كل ما نطلبه ، فنحن فى حاجة إلى ما يمكننا من أن نثبت فى آن واحد جميع قضايا الفصل الواحد سواء كانت محدودة أو غير محدودة . ومن الغريب أن الحكم الاقترانى لفصل من القضايا أسهل بكثير فى تعريفه من الحكم الاقترانى لقضيتين اثنتين . (انظر بند ٣٤ « ٣ ») . فإذا كانت ك فصلا من القضايا فإن إثباتها الاقترانى هو الحكم بأن « ف هى ك » يلزم عنها ف . فإذا صح هذا ، صدقت جميع قضايا الفصل ، وإذا لم يصح ، فإن قضية واحدة على الأقل من قضايا الفصل يجب أن تكون كاذبة . ولقد رأينا كيف يمكن تعريف حاصل الضرب المنطقى لقضيتين بطريقة مصطنعة للغاية ، وكان من الممكن اعتبارها مما لا يمكن تعريفه لأن هذا التعريف لا يستخدم فى إثبات أية خاصة أخرى. ونلاحظ أيضاً أن«بيانو» قد جمع بين اللزوم الصورى واللزوم المادى فى فكرة أصلية واحدة ، بينما يجب أن تبقيا منفصلتين .

٣٣ — ويبدأ «بيانو» قبل القضايا الأصلية، ببعض التعاريف . (١) إذا

(١) F. 1897, Part I.

كانت ا فصلا فإن قولك « س ، ص هما ألفان » معناه أن « س هى ا ، ص هى ا » . (٢) إذا كان ا ، ب فصلين فقولك « كل ا هى ب » معناه « س هى ا يلزم عنها أن س هى ب » .وإذا قبلنا فكرة اللزوم الصورى على أنها فكرة أصلية ، فلا اعتراض على هذا التعريف . ولكن قد نرى أن علاقة الاستغراق فى الفصول أبسط من اللزوم الصورى ، وينبغى ألا تعرف بها . وهذه مسألة صعبة أرجئ الكلام عنها إلى مناسبة قادمة . واللزوم الصورى يبدو أنه الحكم بفصل كامل من اللزوم المادى ، وأن الإشكالات التى تعرض عند هذه النقطة ناشئة عن طبيعة المتغير ، وهى مسألة عمل «بيانو» كثيراً لإبراز أهميتها إلا أنه لم يوفها حقها من البحث والاعتبار . وفكرة القضية الواحدة المشتملة على متغير ، والتى تتضمن قضية أخرى من هذا القبيل يعتبرها «بيانو» فكرة أصلية مع أنها مركبة وينبغى إذن تحليلها إلى عناصرها. ومن هذا التحليل تنجم الحاجة إلى الكلام عن الحكم الاقترانى لفصل بأكمله من القضايا قبل تفسير قضية قولك « س هى ا يلزم عنها أن س هى ب » .(٣) ونأتى الآن على تعريف عديم القيمة تماماً وقد عدل عنه[1] ، وهو تعريف قولك «مثل » فلقد قيل إن السينات التى هى مثل أن س هى ا تؤلف الفصل ا . ولكن هذا إنما يعطينا معنى «مثل » عندما توضع قبل قضية من نوع القضية « س هى ا » . وكثيراً ما نضطر إلى الكلام عن س تصح عليها قضية مَّا عندما لا تكون هذه القضية من النوع « س هى ا » . وفى اعتقاد «بيانو» (ولو أنه لا يضع ذلك على أنه بديهية) أن كل قضية لا تشتمل إلا على متغير واحد يمكن ردها إلى الصورة « س هى ا »[2] . ولكننا سنرى (فى الباب العاشر) أنه توجد على الأقل قضية واحدة لا يمكن ردها إلى هذه الصورة . وعلى كل حال فالفائدة الوحيدة لعبارة « مثل » هى إحداث هذا الرد الذى لا يمكن إذن افتراض إحداثه بدونها . فالواقع أن عبارة

---

(١) وذلك على أثر ما نقده « بادوا Padoa » فى R. d. M. Vol. VI p. 112.

(٢) R. d. M. Vol. VII, No. 1, p. 25; F. 1901, p. 2 * 2, Prop. 4. 0, Note.

« مثل » تشتمل على فكرة أصلية من الصعب عزلها عن الأفكار الأخرى .

ولكى ندرك معنى عبارة « مثل » ينبغى أن نلاحظ قبل كل شىء أن ما يسميه«بيانو» والرياضيون قضية واحدة مشتملة على متغيرواحدهى فى الواقع ، إذا كان المتغير ظاهراً ، ما اجتمع من فصل معين من القضايا يتميز بثبات الصورة ،فى حين أنه إذا كان المتغير حقيقياً،وبحيث يكون الأمر عندئذ أمر دالة قضية فلا يكون لدينا قضية بالمرة ، ولكن مجرد تمثيل تخطيطى عن «أية» قضية من نوع معين . فإذا أردنا مثلا أن نعبر بالمتغير عن القضية القائلة بأن « مجموع زوايا المثلث يساوى قائمتين » قلنا : ليكن س مثلثاً ، إذن مجموع زوايا س يساوى قائمتين . وهذا يعبر عن اتصال جميع القضايا التى نقول فيها عن أشياء معينة خاصة إنها لو كانت مثلثات فإن مجموع زواياها يساوى قائمتين. ولكن دالة القضية التى يكون فيها المتغير حقيقياً ، تمثل أى قضية من صورة خاصة ، ولا تمثل«جميع»هذه القضايا (انظر بنود ٥٩ — ٦٢) ولكل دالة قضية علاقة غير قابلة للتعريف تقوم بين القضايا والأشياء يمكن التعبير عنها بقولنا إن جميع القضايا لها ذات الصورة ، ولكن أشياء مختلفة تدخل فى هذه القضايا . وهذا هو الذى تنشأ عنه دوال القضايا . فإذا كان لدينا مثلا علاقة ثابتة وحد ثابت ، فإنه يوجد تناظر الواحد للواحد بين القضايا التى تقرر أن الحدود المختلفة لها العلاقة المذكورة مع الحد المذكور ، وبين مختلف الحدود التى تقع فى هذه القضايا. وهذا هو المعنى الذى يلزم قبل أن نفهم معنى « مثل » . ولتكن س متغيراً تؤلف قيمه الفصل ا ، ولتكن ء (س) دالة واحدة القيمة للمتغير س ، ولتكن هذه قضية صادقة لجميع قيم س داخل الفصل ا ، وكاذبة لجميع قيم س الأخرى . وإذن حدود ا هى فصل الحدود التى هى مثل ء (س) قضية صادقة . وهذا يفسر معنى «مثل» . ولكن ينبغى أن نتذكر أن مظهر قضية واحدة ء (س) يحققها عدد من قيم س مظهر خداع ؛ لأن ء (س) ليست قضية بالمرة ، ولكنها دالة قضية . والشىء الأساسى هو علاقة مختلف القضايا من صورة معينة بمختلف الحدود الداخلة فيها كموضوعات أو قيم للمتغير . وهذه العلاقة

لازمة كذلك لتفسير دالة القضية ، (سـ) وكذلك لتفسير معنى العبارة «مثل» ولكنها فى حد ذاتها أولية ولا يمكن تفسيرها . (٤) ونأتى الآن على تعريف حاصل الضرب المنطقى أو الجزء المشترك بين فصلين . فإذا كان ا ، ب فصلين ، فإن جزءهما المشترك يتكون من فصل الحدود سـ مثل أن سـ هى ا و سـ هى ب . وهنا ، كما يقول «بادوا» ، يلزم أن يمتد معنى « مثل » إلى أبعد من الحالة التى تقرر فيها القضية الدخول تحت الفصل ، ذلك أنه لا يمكن إثبات أن الجزء المشترك فصل إلا بواسطة التعريف .

٣٤ — أما باقى التعاريف التى تسبق القضايا الأصلية فهى أقل أهمية ويمكن إغفالها . وبعض القضايا الأصلية يبدو أن معنى فقط بالرمزية ولا يعبر عن أية خاصة حقيقية لمدلول تلك الرموز . والبعض الآخر على النقيض ذو أهمية منطقية عالية .

(١) وأول بديهيات «بيانو» هى : « كل فصل يشتمل على نفسه » وهذا يساوى قولنا « كل قضية يلزم عنها نفسها » . وليس هناك من سبيل للاستغناء عن هذه الأولية التى تساوى قانون التطابق اللهم إلا بالطريقة التى استخدمناها آنفاً وهى استخدام اللزوم الذاتى لتعريف القضايا . (٢) ثم لدينا بعد ذلك بديهية أن حاصل ضرب فصلين هو فصل . وكان ينبغى أن يكون نص هذه البديهية وكذلك نص تعريف حاصل الضرب المنطقى منصرفاً إلى فصل الفصول . لأنه عندما ينص فيها على فصلين اثنين فلا يمكن تعميمها إلى حاصل الضرب المنطقى لفصل الفصول إذا كان هذا الأخير غير متناه . وإذا اعتبرنا الفصل مما لا يمكن تعريفه كانت هذه بديهية حقيقية ولازمة جداً فى التفكير . ولكن قد يمكن تعميمها بعض الشئ بواسطة بديهية عن الحدود التى تحقق قضايا ذات صورة معينة . مثلا : « الحدود التى لها علاقة واحدة أو أكثر مع حد أو عدة حدود معينة تؤلف فصلا » . وقد تجنبنا هذه البديهية بالكلية فى قسم ب السابق باستخدام صورة أعم للبديهية فى تعريف الفصل . (٣) ثم نأتى بعد ذلك إلى بديهيتين هما فى الحقيقة واحدة ولا تظهران متميزتين إلا لأن «بيانو» يعرف الجزء

المشترك بين فصلين بدلا من الجزء المشترك بين فصل فصول . وتنص هاتان البديهيتان على أنه إذا كان ا ، ب فصلين فإن حاصل ضربهما المنطقى ا ب داخل فى ا وداخل فى ب . وتبدو هاتان البديهيتان مختلفتين ، لأنه بحسب ما يظهر من الرمزية ا ب قد تختلف عن ب ا . وإنه لمن عيوب الرمزية أنها تعطى ترتيباً لحدود ليس لها فى ذاتها ترتيب ، أو على الأقل ليس لها ترتيب ذو أثر على الموضوع . فى هذه الحالة إذا كان ك فصل فصول فإن حاصل ضرب ك المنطقى يتألف من جميع الحدود المنتمية لكل فصل داخل فى ك . ويظهر جلياً من هذا التعريف أن ترتيب حدود ك لا يدخل فى الأمر . وعلى ذلك فإذا اشتمل ك على فصلين اثنين فقط ا ، ب فسيان أن نمثل حاصل ضرب ك المنطقى بالرمز ا ب أو بالرمز ب ا ، لأن الترتيب موجود فقط فى الرموز لا فى مدلولاتها . ويجب ملاحظة أن البديهية التى تناظر هذا بالنسبة للقضايا هى أن الحكم الاقترانى لفصل من القضايا يلزم عنه أى قضية من قضايا الفصل . وربما كانت هذه أحسن صورة للبديهية . ومع أننا فى غير حاجة إلى بديهية إلا أنه ينبغى أن نوجد وسيلة هنا أو فى أى مكان آخر لربط الحالة التى نبدأ فيها من فصل فصول أو فصل قضايا أو علاقات ، بالحالة التى فيها ينشأ الفصل من إحصاء حدوده . فمثلا مع أن الترتيب لايدخل فى حاصل ضرب فصل من القضايا ، فإنه يوجد ترتيب فى حاصل ضرب قضيتين معينتين ق ، ك ويصبح النص على أن ق ك تساوى ك ق من النصوص ذات المعنى . ولكن هذا يمكن إثباته بواسطة البديهيات التى بدأنا بها الحساب التحليلى للقضايا (بند ١٨) ونلاحظ أن هذا البرهان سابق لبرهان أن الفصل الذى حدوده ق ، ك مطابق للفصل الذى حدوده ك ، ق . (٤) وعندنا بعد ذلك صورتان من القياس كلاهما قضية أولية . وتنص الأولى على أنه إذا كان ا ، ب ، حـ ، فصولا وكان ا داخلا فى ب ، وكان س هى ا ، فإن س هى ب . وتنص الثانية على أنه إذا كان ا ، ب ، حـ فصولا وكان ا داخلا فى ب ، ب داخلا فى حـ ، كان

ا داخلا فى حـ. وإنه لمن أهم مزايا «بيانو» أنه يميز بوضوح بين علاقة الفرد بالفصل وبين علاقة التداخل بين الفصول. والفرق أساسى للغاية : فالعلاقة الأولى أبسط وهى أهم العلاقات ، أما الثانية فعلاقة معقدة مشتقة من اللزوم المنطقى ، فهى ناتجة عن تمييز نوعين من القياس من الشكل الأول ، الضرب الأول ، وهذان النوعان يختلطان عادة ، وأولهما المثال المشهور أن سقراط إنسان ولذا فهو فانٍ ، والثانى أن الإغريق ناس ولذا فهم فانون. وقد نصت بديهية «بيانو» على هاتين الصورتين . وينبغى أن نلاحظ أنه بسبب تعريف ما نعنى بقولنا إن فصلا داخل فى آخر ، فإن الصورة الأولى تنتج عن البديهية الآتية : إذا كانت ق ، ك ، ر ثلاث قضايا ، وكانت ق يلزم عنها أن ك يلزم عنها ر ، فإن حاصل ضرب ق و ك يلزم عنها ر. وقد وضع بيانو هذه الأولية الآن بدلا من الشكل الأول للقياس[1] . فهى أعم ولا يمكن استنتاجها من الصورة المذكورة . أما الصورة الثانية للقياس فإنها عند تطبيقها على القضايا بدل الفصول تنص على أن اللزوم متعد ، وهذه القاعدة فى الواقع هى روح كل سلسلة من الاستنتاج . (٥) وبعد ذلك نأتى على مبدأ للاستدلال يسميه «بيانو» بالتركيب : وهو ينص على أنه إذا كان ا داخلا فى ب ، وكذلك فى حـ ، فهو داخل فى الجزء المشترك فى كليهما . وتقرير هذا المبدأ بالنسبة للقضايا ينص على أنه إذا كانت قضية مَّا يلزم عنها كل من قضيتين أخريين فإنه يلزم عنها الحكم بهما معاً أو حاصل ضربهما المنطقى . وهذا هو المبدأ الذى أسميناه التركيب آنفاً .

٥ — ومن هذه النقطة نسير فى نجاح إلى أن نحتاج إلى فكرة السلب التى تعتبر فى الطبعة من كتاب Formulaire التى نأخذ عنها أنها فكرة أولية جديدة ويعرف الانفصال بواسطتها . ومن السهل تعريف سلب الفصل بواسطة سلب القضية . لأن « س هى لا ا » تساوى « س ليست ا » ولكننا نحتاج إلى بديهية تقول أن لا — ا هو فصل ، وبديهية تقول أن لا — لا ا هو ا . ولقد جاء «بيانو»

---

(١) نظر مثلا .F. 1901, Part 1, † 1, Prop. 3.3 (p. 10)

بديهية ثالثة وهى : إذا كانت ا ، ب، حـ فصولا ، وكان ا ب داخلا فى حـ ، وكانت س هى ا ولكنها ليست حـ ، فإن س ليست ب . وفى صورة أسهل : إذا كانت ق، ك، ر ثلاث قضايا وكانت ق ، ك معاً يلزم عنهما ر ، وكانت ق صادقة بينما ر كاذبة ، فإن ق كاذبة . ويمكن تحسينها مرة ثانية بوضعها فى الصورة الآتية : إذا كانت ك، ر قضيتين ، وكانت ك يلزم عنها ر، فإن لا — ر يلزم عنها لا—ك. وهى صورة حصل عليها «بيانو» كاستنباط. فإذا قدمنا الكلام عن القضايا على الكلام عن الفصول أو دوال القضايا ، أمكننا ، كما رأينا ، أن نتحاشى السلب كفكرة أولية ، كما أمكننا استبدال جميع البديهيات الخاصة بالسلب ، بقاعدة الاختزال .

نتكلم الآن عن الانفصال أو حاصل الجمع المنطقى لفصلين ، وفى هذا نجد «بيانو» يغير طريقته أكثر من مرة. فى الطبعة التى نأخذ عنها يعرف بيانو « ا أو ب » بأنها سلب لحاصل ضرب لا — ا ، لا — ب المنطقى ، أى فصل الحدود التى ليست لا ا ، ولا ب معاً . وفى الطبعات التالية (مثلا Formulaire ، ١٩٠١ ص ١٩) تجد تعريفاً أقل اصطناعاً مثلا « ا أو ب » تتألف من جميع الحدود التابعة لكل فصل يشتمل على ب . وليس هناك اعتراض منطقى على أى من التعريفين . وينبغى ألا يغيب عن بالنا أن ا ، ب فصلان ، وأنه قد يكون هناك معنى مختلف من ناحية المنطق الفلسفى لفكرة انفصال الأفراد مثل « على أو محمود » وسأبحث هذا الموضوع فى الباب الخامس . وعلينا أن نذكر أننا إذا بدأنا بالحساب التحليلى للقضايا فإن الانفصال يعرف قبل السلب . ولكن بالتعريف السابق (تعريف عام ١٨٩٧) يلزم أن يعرف السالب أولا .

٣٦ — ثم تجئ بعد ذلك الفكرتان المرتبطتان وهما فكرة الفصل الصفرى ، وفكرة وجود الفصل . فى طبعة ١٨٩٧ يعرف الفصل بأنه صفرى عندما يكون داخلا فى كل فصل . وإذا تذكرنا تعريف دخول فصل مَّا ا فى فصل مَّا ب « س هى ا يلزم عنها أن س هى ب لجميع قيم س» حينئذ يجب أن نعتبر أن

اللزوم صادق لجميع القيم ، وليس فقط لتلك القيم التى تكون فيها س حقيقة هى ا . ولم يكن «بيانو» واضحاً فى هذه النقطة،وأشك إذا كان قد كون له رأياً فيها . فلو أن اللزوم إنما كان صحيحاً عندما تكون س حقاً هى ا لما أدى إلى تعريف الفصل الصفرى الذى لا يصح فيه هذا الفرض لجميع قيم س . ولست أدرى ألهذا السبب أم لغيرهقد عدل «بيانو»عن تعريف الاستغراق فى الفصول بواسطة اللزومالصورى بين دوال القضايا ، وأصبح الاستغراق فى الفصول على ما يبدو مما لا يمكن تعريفه. وثمة تعريف آخر فضله «بيانو» (مثلا .1895F ص ١١٦) فى وقت من الأوقات ، وهو أن الفصل الصفرى هو حاصل ضرب أى فصل فى سلبه — وهو تعريف تنطبق عليه مثل الملاحظات السابقة . وفى R.d.M. VII, No. 1 (3, Prop. 1.0.) يعرف الفصل الصفرى أنه فصل الحدود تدخل فى كل فصل ، أى فصل الحدود س التى هى مثل أن « ا فصل » يلزم عنها أن « س هى ا » لجميع قيم س. وليس هناك بالطبع حدود مثل س . وهناك صعوبة منطقية كبيرة فى تفسير فصل من جهة الماصدق وليست له ما صدقات وسنرجع إلى هذا فى الباب السادس .

ومن هنا يسير منطق «بيانو» سيراً حسناً ،ولكن ما زال به نقص من ناحية واحدةهو أنه لا يعترف بالأولية لقضايا العلاقات التى لا تقرر عضوية فى فصل. ولهذا السبب نجد تعريف الدالة [1] وغيرها من الأفكار التى تدل أساساً على العلاقات ، معيبة ، ولكن من السهل إصلاح هذا العيب بتطبيق المبادئ الموجودة فى كتابه Formulaire على منطق العلاقات بالطريقة التى شرحناها آنفاً [2] .

---

(١) انظر مثلا F. 1901, Part 1, † 10, Prop. 1.0.01 (p. 33).

(٢) انظر مقالتى "Sur la Logique des relations," R.d.M. Vol. VII, 2 (190).

الباب الثالث

اللزوم واللزوم الصورى

٣٧ – لقد اجتهدت فى الباب السابق أن أقدم ، باختصار ومن غير نقد ، كل ما تحتاجه الرياضة البحتة من معطيات فى صورة أفكار وقضايا أساسية صورية . وسأبين فى الأجزاء التالية أن تلك المعطيات هى كل ما نحتاجه ، وذلك بتعريف مختلف التصورات الرياضية – العدد ، واللانهاية ، والاتصال ، ومختلف الفراغات الهندسية ، والحركة . وسأحاول جهد طاقتى فيما بقى من الجزء الأول أن أبين المشكلات الفلسفية التى تنشأ عن تحليل هذه المعطيات كما سأبين الاتجاه الذى أتصور أنه يساعد على حل هذه المشكلات . وسنكشف عن بعض المعانى المنطقية التى وإن كانت تبدو أساسية جداً فى المنطق إلا أن البحث لا يتناولها عادة فى المؤلفات الخاصة بموضوعنا . وبذلك نضع أمام نظر المناطقة الفلسفيين مسائل مجردة عن ثياب الرمزية الرياضية .

وهناك نوعان من اللزوم ، المادى والصورى ، أساسيان لكل نوع من الاستنتاج . وإنى أود أن أفحص فى الباب الحالى هذين النوعين ، وأميز بينهما ، وأبحث بعض الطرق التى تحاول بها تحليل النوع الثانى منهما .

وعند البحث فى الاستنباط ، من المألوف أن نسمح بإدخال عنصر نفسانى ، وأن نعترف بحصولنا على معرفة جديدة بواسطته . ولكنه واضح أننا عندما نستنتج قضية من أخرى استنتاجاً صحيحاً إنما نفعل ذلك بفضل علاقة قائمة بين القضيتين سواء أتصورناها أم لم نتصورها . ففى الواقع أن دور العقل فى الاستنباط هو مجرد الاستقبال كما نفترض عادة أن هذا هو دوره فى إدراك المحسوسات . والعلاقة التى بفضلها يمكننا الاستنتاج الصحيح هى ما أسميها اللزوم المادى . ولقد سبق أن رأينا أننا ندور فى حلقة مفرغة لو عرفنا هذه العلاقة بما يأتى :

إذا كانت قضية ما صادقة فإن قضية أخرى تكون صادقة، لأن كلا من «إذا» و«فإن» تتطلب لزوماً . وفى الواقع أن العلاقة تكون قائمة إذا قامت بالفعل، دون نظر إلى صدق أو كذب القضايا المستخدمة .

وهكذا عندما نتابع ما يترتب على فروضنا من اللزوم ينتهى بنا المطاف إلى نتائج لا تتفق بأية حال مع مانعرفه عادة عن اللزوم. فقد وجدنا أن أية قضية كاذبة تلزم عنها كل قضية، وأن أية قضية صادقة تلزم عن كل قضية. فالقضايا كمجموعة من الأطوال طول كل منها بوصة أو بوصتان، واللزوم كالعلاقة «يساوى أو أصغر من» بين هذه الأطوال . فليس من المسلم به عادة أن « ٢ + ٢ = ٤ » يمكن أن تستنبط من « سقراط إنسان » أو أن كلا من القولين يلزم عن « سقراط مثلث » . وفى اعتقادى أن السبب الرئيسى فى ترددنا فى الاعتراف بهذا النوع من اللزوم هو تعلقنا باللزوم الصورى ، وهو فكرة أكثر ألفة لدينا ، وتكون ماثلة حقا أمام العقل حتى عندما يكون الكلام صراحة عن اللزوم المادى . فعند الاستنباط من « سقراط إنسان » قد جرت العادة لا على الكلام عن الفيلسوف الذى أثار الأثينيين ، ولكن على اعتبار أن سقراط مجرد رمز يمكن أن يحل محله أى رجل آخر . وليس هناك ما يمنع ، لولا ضرب من التحيز العامى للقضايا الصحيحة ، من أن نضع مكان سقراط أى شىء آخر ، كالعدد ، أو المنضدة ، أو الكعكة مثلا . ومع ذلك فكلما أمكن استنباط قضية بالذات من أخرى ، كالحال فى هندسة أقليدس ، فإن الأمر يتضمن استخدام اللزوم المادى . ولو أنه بصفة عامة يمكن اعتبار اللزوم المادى كحالة خاصة من اللزوم الصورى نحصل عليه بوضع قيمة ثابتة للمتغير ، أو المتغيرات الداخلة فى اللزوم الصورى المذكور . ومع أنه لا نزال ننظر إلى العلاقات بعين الرهبة الناجمة عن أنها غير مألوفة ، ومع أنه من الطبيعى أن نتساءل عما إذا كانت علاقة مثل اللزوم موجودة فعلا ، إلا أنه بفضل المبادئ العامة التى وضعناها فى القسم حـ من الباب السابق ينبغى أن توجد علاقة لا تقوم إلا بين القضايا ،

وتقوم بين أى قضيتين إما أن تكون الأولى كاذبة أو تكون الثانية صادقة. ومن بين مختلف العلاقات المتكافئة التى تحقق هذه الشروط هناك علاقة تسمى اللزوم، وإذا كانت مثل هذه الفكرة غير مألوفة فهذا لا يكفى لإثبات أنها من نسج الخيال .

٣٨ – وهنا يتحتم النظر فى مسألة منطقية غاية فى الصعوبة وهى التمييز بين القضية المحكوم بها فعلا والقضية التى تعتبر مجرد تصور معقد . ويذكر القارئ أن إحدى المبادئ الأولية التى لا نستطيع لها إثباتاً هى أنه إذا كان المقدم فى لزوم ما صادقاً فإنه يمكن الاستغناء عنه مع الحكم بإثبات التالى . وقد لاحظنا أن هذا المبدأ يبتعد عن التقرير الصورى ويشير إلى قصور الطريقة الصورية بصفة عامة . ويُستخدم هذا المبدأ كلما تكلمنا عن أننا أثبتنا قضية ما ، لأن الذى يحدث هو فى جميع هذه الأحوال أننا نثبت أن هذه القضية تلزم عن قضية أخرى صادقة . وهناك صورة أخرى يُستخدم فيها هذا المبدأ باستمرار وهى التعويض بثابت ، يحقق المقدم ، فى التالى وذلك فى اللزوم الصورى . فإذا كانت φ س تستلزم Ψ س بجميع قيم س، وإذا كان ا ثابتاً يحقق φ س فإنه فى مكنتنا أن نقرر Ψ ا مستغنيين عن صحة المقدم φ ا . وهذا يحدث كلما طبقنا على القضايا الخاصة أيا من قواعد الاستنباط التى تفترض أن المتغيرات هى قضايا . وعلى ذلك فالقاعدة المذكورة أساسية لأى نوع من أنواع البرهان .

ويتضح استقلال هذا المبدأ عندما ننظر فى لغز «لويس كارول» « ماذا قالت السلحفاة لأخيل »[1] . ولقد أدت بنا قواعد الاستنباط التى ارتضيناها إلى أنه إذا كانت ق، ك قضيتين فإن ق مع «ق يلزم عنها ك» يلزم عنها ك. وقد نتصور لأول وهلة أن هذا يمكننا من تقرير ك بشرط أن تكون ق صادقة ويلزم عنها ك . ولكن اللغز الذى ذكرنا يوضح أن هذا ليس هو الحال، وأنه ما لم نستخدم مبدأ جديداً ، فإننا ندور فى عدد لا نهاية له من اللوازم التى تزداد تعقيداً فى كل خطوة دون أن نصل أبداً إلى تقرير ك . فنحن فى الواقع فى حاجة

(١) Mind, N.S. Vol. IV, p. 278.

إلى فكرة «إذن» وهى تختلف تماماً عن فكرة « يلزم عنها »، وتقوم بين الأشياء المختلفة . فنى النحو نميز بين الفعل واسم الفاعل أى مثلا بين « ا أكبر من ب » وبين «من حيث أن ا أكبر من ب » فنى العبارة الأولى نقرر بالفعل قضية، وفى الثانية مجرد اعتبار لهذا . ولكن هذه أمور نفسية، فى حين الفرق الذى أريد أن أوضحه فرق منطقى حقيقى . ومن الواضح أنه إذا سمح لى باستخدام كلمة حكم فى معنى غير نفسانى فإن القضية « ق تلزم عنها ك » تقرر لزوماً مع أنها لا تقرر ق أو ك، فالقاف والكاف اللتان تدخلان فى هذه القضية ليسا بالضبط نفس القاف والكاف اللتين هما قضيتين منفصلتين، على الأقل عندما تكونان صادقتين. والسؤال هو : كيف تكون قضية صادقة بالفعل وتختلف عنها إذا كانت شيئاً واقعاً ولم تكن صادقة . ومن الواضح أن القضايا الصادقة والقضايا الكاذبة كذلك هى أشياء من نوع ما ، ولكن القضايا الصادقة لها خاصية ليست للقضايا الكاذبة ، وهى خاصية يمكن فى معنى غير نفسانى أن تسمى « ما يحكم بها » . إلا أنه لمن العسير جداً وضع نظرية مقبولة لا تناقض فيها لهذه المسألة . لأنه لو كان الحكم يغير بأى حال القضية، فإن كل قضية أمكن بألا يحكم بها فى أى سياق لا يمكن أن تكون صادقة لأنها عندما يحكم بها تصبح قضية غير الأولى . ولكن هذا واضح البطلان لأن فى «ق يلزم عنها ك» ق، ك لم يحكم بهما ومع ذلك يجوز أن تكونا صادقتين. وإذا تركنا هذا اللغز للمنطق، فإنه ينبغى أن يكون هناك فرق بين القضية المحكوم بها والقضية غير المحكوم بها[1] . وعندما نقول «إذن» نكون قد أثبتنا علاقة لا تقوم إلا بين القضايا المحكوم بها، وهى لذلك تختلف عن اللزوم. وكلما وردت عبارة «إذن» يمكن ترك المقدم، وتقرير التالى وحده . ويبدو أن هذه أول خطوة فى حل لغز « لويس كارول » .

٣٩ — غالباً ما يقال إنه يجب أن يكون للاستنباط مقدمات ونتيجة . ويبدو أن الاعتقاد السائد هو أنه يلزم لذلك مقدمتان أو أكثر لجميع الاستنباطات

(١) فريجه له رمز خاص للدلالة على الحكم .

أو لأغلبها على الأقل . ويحمل على هذا الاعتقاد ، لأول وهلة ، حقائق ظاهرة ، فكل قياس مثلا له مقدمتان . ولكن نظرية كهذه تعقد علاقة اللزوم تعقيداً كبيراً ، فهي تجعل منه علاقة ذات أي عدد من الحدود ، وأنها متماثلة بالنسبة لجميع تلك الحدود عدا واحداً منها ، فهي غير متماثلة بالنسبة لهذا الحد (النتيجة). وهذا التعقيد ليس لازماً مع ذلك ، أولا لأن التقرير الآنى لعدد من القضايا هو فى حد ذاته قضية مفردة . وثانياً ، لأنه بحسب القاعدة التى أسميناها «التصدير» ، من الممكن دائماً عرض اللزوم فى صراحة على أنه قائم بين قضايا مفردة . ومثال الحالة الأولى : إذا كان ك فصلا من القضايا ، فإن كل قضايا الفصل ك تقرر فى القضية الواحدة « بلجميع قيم س ، إذا كانت س يلزم عنها س ، فإن « س هى ك » يلزم عنها س أو باللغة العادية «كل ك صادقة». ومثال الحالة الثانية ، التى تفرض أن عدد المقدمات محدود : «ق.ك يلزم عنها ر» يساوى « إذا كانت ك قضية» ق يلزم عنها أن ق يلزم عنها ر » وفى الصورة الأخيرة يكون اللزوم قائماً صراحة بين القضايا المفردة . وعلى ذلك فى مكنتنا أن نعتبر أن اللزوم هو علاقة بين قضيتين لا علاقة تربط عدداً اختيارياً من المقدمات بنتيجة واحدة .

٤٠ – نتحدث الآن عن اللزوم الصورى ، وهو معنى أصعب بكثير من معنى اللزوم المادى . ولكى نتجنب الفكرة العامة لدالة القضايا دعنا نبدأ ببحث حالة خاصة مثل « س إنسان يلزم عنها أن س فان بلجميع قيم س » وهذه القضية تساوى « جميع الناس فانون » « كل إنسان فان » « وأى إنسان فان » . ويبدو أنه من المشكوك فيه جداً أن هذه هى نفس القضية الأولى . وهى أيضاً مرتبطة بقضية من حيث المفهوم الخالص فيها نقرر أن الإنسان فكرة مركبة والفناء إحدى مركباتها . ولكن هذه القضية غير تلك التى نحن بصددها . فى الحق أن مثل هذه القضايا المفهومية لا تكون حاضرة دائماً عندما يكون فصل مّا داخلا فى فصل آخر . فبصفة عامة يمكن تعريف كل من الفصلين بعدد من المحمولات

المختلفة، وليس من الضرورى بأيةحال أن يكون كل محمول فى الفصل الأصغر مشتملا على كل محمول فى الفصل الأكبر كعامل من عوامله . وقد يحدث فى الواقع أن يكون كل من المحمولين بسيطاً من الناحية الفلسفية . ف «اللون» و«الموجود» كلاهما بسيط ، ومع ذلك ففصل الألوان جزء من فصل الموجودات. ووجهة نظر المفهوم المشتقة من المحمولات هى فى معظمها غير لازمة للمنطق الرمزى، ولا للرياضة ، ولن أبحث فيها أكثر من ذلك فى الوقت الحاضر .

٤١ — وقد يتسرب الشك ، بادئ ذى بدء ، عما إذا كانت « س إنسان يلزم عنها س فان » تعتبر تقريراً تاماً لجميع الحدود الممكنة ، أو فقط للحدود التى هى مثل الناس . ومع أن «بيانو» ليس صريحاً فى هذه النقطة إلا أنه يبدو أنه من أنصار وجهة النظر الأخيرة . ولكن فى هذه الحالة يصبح الفرض عديم الأهمية ويصبح مجرد تعريف س هو : س تعنى أى إنسان . ويصبح الفرض مجرد تقرير خاص بمعنى الرمز س، وجميع ما يقرر خاصاً بالموضوع الذى يعالجه الرمز يوضع فى النتيجة . فالمقدمة تقول : س تعنى أى إنسان . والنتيجة تقول : س فان. ولكن اللزوم لا يتناول إلا الرمزية، أى : ما دام كل إنسان فان، فإذا كانت س تدل على إنسان ، فإن س فان . وبناء على وجهة النظر هذه يختفى اللزوم الصورى كلية تاركاً لنا القضية الآتية : « أى إنسان فان » كتعبير عن جميع ما يهم فى القضية ذات المتغير . ويبقى علينا الآن أن نفحص القضية « أى إنسان فان » وأن نفسرها ، إذا أمكن ذلك ، دون إدخال المتغير أو اللزوم الصورى مرة أخرى . ولابد من الاعتراف أن وجهة النظر هذه تجنبنا كثيراً من المصاعب . خذ مثلا التقرير الآتى لجميع القضايا الخاصة بفصل مَّا ك . فهذه لا يعبر عنها بقولنا « س هى ك يلزم عنها س لجميع قيم س » لأن هذه القضية كما هى لا تدل على المقصود ، لأنه لو أن س ليست قضية فإن « س هى ك » لا يمكن أن يلزم عنها س . وعلى ذلك فحال تغيير س يجب أن يقتصر على قضايا إلا إذا قدمنا (انظر بند ٣٩) المقدم « س يلزم عنها س » . وهذه

الملاحظة تنطبق بصفة عامة ، فى الحساب التحليلى للقضايا ، على جميع الحالات التى تمثل فيها النتيجة بحرف واحد ، فما لم يمثل بالفعل هذا الحرف قضية ، فإن اللزوم المقرر يكون باطلا لأن القضايا فقط هى التى تلزم . والمهم هو أنه إذا كانت س هى المتغير الذى نتكلم عنه ، فإن س ذاتها قضية لجميع قيم س التى هى قضايا ، ولكنها ليست لغير ذلك من القيم. وهذا يوضح حدود الميدان الذى يجب ألا يخرج عنه المتغير ،فهو يجب أن يتغير فقط داخل دائرة القيم التى يكون فيها جانبا اللزوم الرئيسى قضايا ، أو بعبارة أخرى يجب أن يكون الجانبان دوال قضايا خالصة عندما لا نضع ثابتاً مكان المتغير . وإذا لم تلزم هذه القيود فإننا قد نتزلق بسرعة فى الأخطاء . ونذكر هنا أنه قد نجد أى عدد من اللوازم التابعة لا يلزم فيها أن تكون حدودها قضايا ، فالكلام هنا عن اللوازم الرئيسية . خذ مثلا أولى قواعد الاستنباط : إذا كانت ق يلزم عنها ك فإن ق يلزم عنها ك ، فإن هذا يصدق سواء كانت ق ، ك قضيتين أو لم تكونا كذلك. لأنه إذا لم تكن أى واحدة منهما قضية فإن « ق يلزم عنها ك » تصبح كاذبة ، ولكنها تبقى قضية . فى الواقع بمقتضى تعريف القضية ، تقرر القاعدة التى وضعناها أن« ق يلزم عنها ك »دالة قضية أى أنها قضية،لجميع قيم ق ، ك. ولكن إذا طبقنا قاعدة «الاستيراد» على هذه القضية لنحصل على « ق يلزم عنها ك » فإننا نحصل على صيغة تصدق فقط عندما تكون ق ، ك قضيتين ، ولكى نجعلها صادقة دائماً يجب أن نقدم لها بالمقدم « ق يلزم عنها ق ، ك يلزم عنها ك » وبهذه الطريقة نستطيع التخلص من قيد تغير المتغير فى أغلب الحالات إن لم يكن فيها جميعاً . فمثلا فى تقرير حاصل الضرب المنطقى لفصل من القضايا نجد الصيغة « إذا كانت س يلزم عنها س فإن س هى ك يلزم عنها س » تبدو ولا اعتراض عليها وتسمح أن تتغير س دون قيد . وهنا نجد أن اللوازم التابعة فى المقدمة والنتيجة لوازم مادية ، أما اللزوم الرئيسى وحده فهو صورى .

فإذا رجعنا إلى « س إنسان يلزم عنها س فان » فإنه يتضح أننا لا نحتاج إلى قيد لكى يتحقق أننا نستخدم قضية حقيقية. وواضح أيضاً أنه مع أننا قد نقصر قيم س على الناس، ومع أنه يظهر أننا نفعل ذلك فى القضية « جميع الناس فانون » إلا أنه ليس هناك من سبب لتقييد قيم س بهذا القيد إذا كان الأمر يتعلق فقط بصدق القضية . فسواء أكان س إنساناً أم لم يكن كذلك فقولنا « س إنسان » هى دائماً، عندما نضع ثابتاً مكان س، قضية يلزم عنها، لجميع قيم س، القضية « س فان ». وإلى أن نقبل الفرض كذلك فى الحالات التى يكون فيها باطلا سنجد أنه من المستحيل علينا أن نعالج علاجاً مرضياً حالة الفصل الصفرى والدوال الصفرية للقضايا . وكلما أمكن المحافظة على صحة لزومنا الصورى يجب أن نسمح للمتغير س أن يأخذ جميع القيم دون استثناء ، وعندما نجد من الضرورى وضع قيود على تغيره ، ينبغى ألا يعتبر اللزوم صورياً ، إلى أن يزول هذا القيد حين نبدأ به كمقدم (إذا كانت Ψ س قضية كلما كانت س تحقق φ س ، حيث φ س دالة قضايا ، وإذا كانت Ψ س ، كلما كانت قضية، يلزم عنها χ س فإن « Ψ س يلزم عنها χ س » ليست لزوماً صورياً ولكن « φ س يلزم عنها أن Ψ س يلزم عنها χ س » هى لزوم صورى).

٤٢ ــ نلاحظ أن « س إنسان يلزم عنها س فان » ليست علاقة بين دالتى قضيتين، ولكنها بذاتها دالة قضية مفردة لها خاصية جميلة وهى أنها دائماً صادقة . ذلك أن « س إنسان » كما هى ليست قضية، بالمرة ولا يلزم عنها شىء . وينبغى ألا نغير س فى « س إنسان » ثم مستقلا عن ذلك نغيرها فى « س فان » لأن هذا يؤدى إلى القضية « كل شىء إنسان » يلزم عنها « كل شىء فان » وهى قضية صادقة إلا أنها ليست ما قصدنا إليه . وينبغى التعبير عن هذه القضية بمتغيرين إذا أردنا الاحتفاظ بلغة المتغيرات ، فيقال : « س إنسان يلزم عنها أن ص فان » ولكن هذه الصيغة غير مقبولة أيضاً لأن معناها الطبيعى يكون « إذا كان كل شىء إنسانا فإن كل شىء فان » . وما نريد

توكيده هو أنه مع الاعتراف بأن س متغير ينبغي أن تكون هي بذاتها في طرفي اللزوم، وهذا يحتاج ألا نحصل على لزومنا الصوري بأن نغير أولا (مثلا) سقراط في « سقراط إنسان » ثم في « سقراط فان » ولكن ينبغي أن نبدأ بالقضية كلها « سقراط إنسان يلزم عنها سقراط فان » ونغير سقراط في هذه القضية بكليتها. وهكذا يكون اللزوم الصوري هنا هو تقرير لفصل من اللوازم لا تقرير للزوم مفرد . وبالجملة نحن لا نتكلم عن لزوم واحد يحتوي على متغير ، بل عن لزوم متغير . ويكون لدينا فصل من اللوازم ، ليس بينها واحد يحتوي على متغير ، ونحن نقرر أن كل عضو من أعضاء هذا الفصل صادق . وهذه هي الخطوة الأولى نحو تحليل الفكرة الرياضية عن المتغير .

وقد نتساءل كيف يمكن تغيير سقراط في القضية « سقراط إنسان يلزم عنها سقراط فان » فبفضل الواقع من أن القضايا الصادقة تلزم عن جميع القضايا الأخرى نجد أن « سقراط إنسان يلزم عنها سقراط فيلسوف » ولكن في هذه القضية وللأسف الشديد نجد أن تغيير سقراط قد قُيِّد قيداً شديداً . وقد يبين هذا أن اللزوم الصوري يتضمن شيئاً أسمى من علاقة اللزوم وأن علاقة إضافية يجب أن تقوم عندما يستطيع حد أن يتغير . في المثال الذي نحن بصدده ، من الطبيعي أن نقول إنّ العلاقة المتضمنة هي علاقة التداخل لكل من فصلي الناس والفانين ، وهي ذات العلاقة التي كانت تعرف وتبين في لزومنا الصوري . ولكن وجهة النظر هذه أبسط من أن تفسر جميع الحالات ، ولذلك لا حاجة لنا بها في أية حال . ويمكن تفسير عدد أكبر من الحالات ، بالفكرة التي سأسميها « الحكم assertion » وسنشرح الآن باختصار هذه الفكرة تاركين تحليلها للباب السابع .

٤٣ ــ وقد جرت العادة دائماً إلى تقسيم القضايا إلى موضوع ومحمول ، ولكن هذا التقسيم به عيب هو إغفال الفعل . ومع أننا نجد ترضية لطيفة بكلام دارج عن الرابطة إلا أن الفعل يحتاج إلى احترام أكثر من ذلك . ويمكن القول

بصفة عامة أنه يمكن تقسيم القضايا ، بعضها بطريقة واحدة والبعض بأكثر من طريقة ، إلى حد هو الموضوع ، وإلى شيء نقوله عن الموضوع وسأسمى هذا الشيء الحكم . وبذلك يمكن تقسيم « سقراط هو إنسان »[1] إلى «سقراط» و«هو إنسان» . والفعل — الذى هو العلامة المميزة للقضايا — يبقى تابعاً للحكم ، ولكن الحكم ذاته منزوعاً عن موضوعه لا يوصف بالصدق أو الكذب . وفى المناقشات المنطقية كثيراً ما نجد فكرة الحكم ، ولكن حيث تُستخدم لها كلمة قضية فإنها لذلك لا تحظى باعتبار مستقل . خذ مثلا أحسن نص عن تطابق ما لا يمكن تمييزهما الواحد عن الأخر« إذا كان س ، ص أى شيئين مختلفين ، فإننا فى مكنتنا أن نحكم بشيء عن س دون أن يمكن الحكم به عن ص » ولولا كلمة حكم ، وهى ما يحل محلها عادة كلمة «قضية» ، لما كان هناك أى اعتراض على هذه العبارة . كذلك يمكن أن يقال «سقراط كان فيلسوفاً ، ونفس الشيء صحيح بالنسبة لأفلاطون » ومثل هذه العبارات تحتاج إلى تحليل القضايا إلى حكم وموضوع حتى يكون هناك شيء مطابق يمكن أن نقول إنه أثبت للموضوعين .

٤٤ — ويمكن أن نرى الآن كلما كان التحليل إلى موضوع وحكم مشروعاً كيف نميز بين اللوازم التى تحتوى على حد يمكن أن يتغير من تلك التى ليس هذا هو حالها . وهناك طريقان لهذا التمييز وعلينا أن نختار بينهما . فيمكن أن يقال إن هناك علاقة بين الحكمين « يكون إنساناً »، « يكون فانياً »، وبفضل هذه العلاقة عندما تقوم إحداهما تقوم الأخرى . أو نستطيع أن نحلل القضية الكاملة « سقراط هو إنسان يلزم عنها سقراط هو فان » إلى سقراط وحكم عنه، ثم نقول إن هذا الحكم قائم بجميع الحدود . ولا يمكن أن تقوم أى من هاتين النظريتين مقام التحليل السابق لعبارة « س هو إنسان يلزم عنها س هو فان »

---

(١) فى الإنجليزية القضية ثلاثية فيها موضوع ، ومحمول ، والرابطة أى فعل الكينونة ، مثل Socrates is a man . أما فى العربية فهى عادة ثنائية ، مثل « سقراط إنسان » . وقولنا « سقراط هو إنسان » لا يساوى العبارة الإنجليزية تماما (المترجم) .

إلى فصل من اللوازم المادية . ولكن أيا من النظريتين صحت فإنها تسير بالتحليل خطوة إلى الأمام . وتعتور النظرية الأولى صعوبة هى أنه من الأمور الأساسية فى العلاقة بين الحكمين القائمين أن يحكم بهما لنفس الموضوع ، ولو أنه فيما عدا ذلك لا يهم بالمرة أى موضوع نختار . ووجهة الاعتراض على النظرية الثانية تأتى من أن تحليل « سقراط إنسان يلزم عنها سقراط فان » بالطريقة المقترحة يبدو بعيد الإمكان . وتتكون القضية التى نحن بصددها من حدين وعلاقة ، فالحدان هما « سقراط إنسان » و « سقراط فان » ويبدو أنه عندما نريد تحليل قضية علاقية إلى موضوع وحكم ينبغى أن يكون الموضوع أحد حدى العلاقة التى نحكم بها . ويبدو أن هذا الاعتراض أخطر من الاعتراض على وجهة النظر الأولى . ولذلك على الأقل فى الوقت الحاضر ، سآخذ بوجهة النظر الأولى معتبراً اللزوم الصورى مشتقاً من علاقة بين حكمين .

سبق أن ذكرنا أن علاقة الاستغراق فى الفصول غير كافية . وهذا ناشىء عن عدم إمكان اختزال القضايا بين العلاقات . خذ مثلا قولك « سقراط متزوج يلزم عنها أن سقراط كان له والد » وهنا نقول إنه لما كان لسقراط علاقة يجب أن تكون له علاقة أخرى. ولنضرب مثالا أفضل من ذلك، هذه العبارة « ا قبل ب يلزم عنها أن ب بعد ا » . فهذا لزوم صورى فيه الحكمان (على الأقل ظاهريا) يعالجان موضوعين مختلفين . والطريقة الوحيدة لتجنب هذا هو القول بإن كلتا القضيتين فيهما كلا من ا ، ب كموضوعين، وهو ما يختلف عن قولنا أن لهما موضوع واحد هو « ا ، ب » . وهذه شواهد توضح أن فكرة دالة القضايا وفكرة الحكم أساسيتان أكثر من فكرة الفصل، وأن الأخيرة غير كافية لتفسير جميع حالات اللزوم الصورى . وسوف لا أطيل الكلام عن هذا الآن، فستأتى الأمثلة كثيرة على ذلك فى الأجزاء التالية من هذا الكتاب.

ومن المهم أن ندرك أن فى تحليلنا هذا اللزوم الصورى نجد أن فكرة « كل حد» مطلقة ومما لا يمكن تعريفه . فاللزوم الصورى يصدق عن كل حد، وعلى ذلك

يمكن تفسير « كل ا هى ب » بواسطة « س هى ا يلزم عنها س هى ب » ولكن كلمة «كل» الواردة هنا هى فكرة مشتقة وثانوية تفترض مقدماً فكرة «كل حد». ويبدو أن جوهر ما يمكن تسميته بالصواب الصورى ، والتفكير الصورى عامة ، هو أن يكون حكماً مّا مثبتاً صدقه عن جميع الحدود. وإلى أن نقبل فكرة «كل حد» يصبح الصواب الصورى مستحيلا .

٤٥ — وترجع الأهمية الأساسية للزوم الصورى إلى أنه متضمن فى جميع قواعد الاستنباط ، وهذا يبين أننا لا نستطيع أن نأمل فى تعريفه تعريفاً كاملا بعبارة اللزوم المادى، إنما ينبغى أن ندخل عنصراً أو عناصر جديدة . ومع ذلك فعلينا أن نلاحظ أنه فى الاستنباط الخاص ليس ضرورياً أن تكون القاعدة التى يجرى بحسبها الاستنباط مقدمة . وقد أكد هذا الرأى برادلى[1] . وهى مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بمبدأ حذف المقدمة الصادقة ، وهى ناحية تتحطم فيها الصورية . فلكى يمكن تطبيق قاعدة من قواعد الاستنباط ينبغى شكلا أن تكون لدينا مقدمة تقرر أن الحالة التى نحن بصددها هى حالة من حالات القاعدة . وعلينا بعد ذلك أن نثبت القاعدة التى نسير بها من القاعدة إلى الحالة الخاصة ، وأن نثبت أننا نعالج حالة خاصة من هذه القاعدة . وهكذا نمضى فى عملية لا تنتهى . والحقيقة طبعاً هى أن أى لزوم تسنده قاعدة الاستنباط يقوم فعلا ، وليس هو مجرد شىء يلزم عن القاعدة. وهذا مَثَلٌ على المبدأ غير الصورى، مبدأ حذف المقدمة الصادقة. فإذا كانت قاعدتنا يلزم عنها لزوم ما ، فإنه يمكن حذف القاعدة والحكم باللزوم . ولكن تبقى حالة أن كون قاعدتنا يلزم عنها فعلا اللزوم المذكور ، إذا أثبتت القاعدة أصلا ، ينبغى أن تدرك ببساطة ، لا أن يكفلها أى استنباط صورى . وغالباً ما يكون الإدراك المباشر للزوم الذى نحن بصدده سهلا ومشروعاً تبعاً لذلك لسهولة إدراك أنه يلزم عن واحد أو أكثر من قواعد الاستنباط .

(١) Logic, Book II, Part 1, Chap. II (p. 227).

ونجمل كلامنا عن اللزوم الصورى . فقد قلنا إن اللزوم الصورى هو إثبات كل لزوم مادى لفصل معلوم . وفصل اللوازم المادية المتضمنة فى الحالات البسيطة، هو فصل جميع القضايا التى يثبت فيها أن حكماً معلوماً بالنسبة لموضوع أو عدة موضوعات معلومة يلزم عنه حكم معلوم بالنسبة لنفس الموضوع أو الموضوعات. وعندما يقوم لزوم صورى، فقد اتفقنا على اعتباره ، كلما أمكن ذلك ، ناشئاً عن علاقة بين الأحكام المعنية. وتثير هذه النظرية صعوبات فلسفية كبيرة، ونحتاج للدفاع عنها إلى تحليل دقيق لمكونات القضايا . وهو ما نريد الكلام عنه الآن .

الباب الرابع

أسماء الأعلام والصفات والأفعال

٤٦ ــ سنبحث فى هذا الباب فى بعض مسائل خاصة تدخل فيما يمكن أن نسميه بالنحو الفلسفى . وفى اعتقادى أن دراسة النحو تلقى ضوءاً على المسائل الفلسفية أكثر مما يعترف به الفلاسفة عادة . ومع أن الفروق النحوية لا يمكن دون تمحيص اعتبارها مقابلة لفروق فلسفية حقة إلا أن بعضها شاهد لأول وهلة على بعضها الآخر ، وكثيراً ما يمكن استخدامها بفائدة كبيرة كأداة من أدوات الكشف . وعلاوة على ذلك فيجب أن نعترف أن كل لفظة ترد فى جملة ، فلها معنى مَّا . فالصوت العديم المعنى تماماً لا يمكن استخدامه بالطريقة الثابتة إلى حدمَّا التى تستخدم بها اللغة الألفاظ . وبذلك يمكن التحقق من صحة التحليل الفلسفى لقضية مَّا بالتدرب على تحديد معنى كل لفظ من الألفاظ المستخدمة فى الجملة التى تعبر عن القضية . وعلى العموم فى نظرى أن النحو يقربنا من المنطق الصحيح بأكثر مما يعترف به الفلاسفة عادة. وسنتخذ من النحو مرشداً لنا فيما يلى دون أن نصبح عبيداً له .

وهناك ثلاثة من أجزاء الكلام نجد لها أهمية خاصة وهى : المسميات ، والصفات ، والأفعال . ومن بين المسميات ما هو مشتق من الصفات أو الأفعال كقولك الإنسانية من إنسان ، وقولك متتابعة من يتبع (والكلام هنا عن الاشتقاق المنطقى وليس عن الاشتقاق الصرفى). أما أسماء الأعلام، أو المكان، والزمان، والمادة فهى ليست مشتقات ، بل يبدو أساساً أنها مسميات . وما دمنا نبحث عن تصنيف للأفكار لا الألفاظ ، فسأسمى بالصفات أو المحمولات جميع الأفكار التى يمكن أن تكون كذلك حتى ولو كانت فى الصيغة التى يسميها النحو مسميات. فالحقيقة كما سنرى هى أن «إنسانى» و«إنسانية» تدلان على نفس

التصور تماماً ، وإنما تستخدم الواحدة أو الأخرى على حسب نوع العلاقة التى يعبر عنها هذا التصور بالنسبة للمكونات الأخرى فى القضية التى تستخدم فيها . فالفرق الذى نحتاج إليه ليس مطابقاً للفرق النحوى بين المسمى والصفة لأن التصور الواحد يمكن بحسب الأحوال أن يكون مسمى، كما يمكن أن يكون صفة . ولكنا نحتاج إلى التمييز بين أسماء الأعلام والأسماء ،أو بوجه أصح التمييز بين الأشياء التى تدل عليها هذه الأسماء .

فكل قضية كما رأينا فى الباب الثالث يمكن تحليلها إلى شىء محكوم به وشىء يدور عليه هذا الحكم. فاسم العَلَم عندما يرد فى قضية هو دائماً ، على الأقل بحسب أحد طرق الإعراب المختلفة (عندما تكون هناك أكثر من طريقة) الموضوع بالنسبة للقضية أو لقضية تابعة من مكوناتها،وليس ما يقال عن الموضوع . أما الصفات والأفعال ، من الجهة الأخرى ، فى وسعها أن ترد فى قضايا لا يمكن أن تعتبر موضوعاً فيها ، و إنما مجرد أجزاء من الحكم. وتتميز الصفات بقدرتها على «الدلالة»، وهو اصطلاح ننوى استخدامه فى معنى فنى فى الباب الخامس . وتتميز الأفعال بصلتها الخاصة بالصدق أو الكذب ، وهى صلة من أصعب الأمور تعريفها . وبفضل هذه الصلة تميز الأفعال بين القضية المحكوم بها وغير المحكوم بها، فتميز مثلا بين « مات قيصر» وبين « موت قيصر ». وينبغى أن نشرح هذه الفروق شرحاً أوفى الآن، وسنبدأ بالتمييز بين أسماء الأعلام والأسماء العامة .

٤٧ — وتعرف الفلسفة مجموعة خاصة من الفروق كلها متطابقة إلى حدما ، أعنى التمييز بين الموضوع والمحمول وبين الجوهر والعرض ، وبين المسمى والصفة، وبين « هذا this » « والماهو what »[١] .

وأود أن أشير باختصار إلى ما يبدو لى عن حقيقة هذه الفروق . والموضوع جد هام لأن الفرق بين الواحدية والمنادية وبين المثالية والتجريبية ، وبين هؤلاء

(١) الزوج الأخير من الحدود يرجع إلى برادلى .

الذين يقولون أن الصدق معنىً بالموجودات، وبين هؤلاء الذين ينكرون هذا الاعتقاد ، كل ذلك يتوقف فى كلياته أو جزئياته على وجهة النظر التى نقرها فى هذه المسألة . ولكننا نبحث فيه الآن لأنه أساسى لكل نظرية عن العدد أو عن طبيعة المتغير . أما علاقته بالفلسفة فسنغفلها كلية من حسابنا على ما لها من أهمية.

وكل ما يمكن أن يكون موضوعاً للفكر أو ما يمكن أن يرد فى قضية صادقة أو كاذبة، أو يمكن أن يعد واحداً، سأسميه «حداً» . فهذه إذن هى أوسع كلمة فى قاموس الفلسفة . وسأستخدم كمترادفات لهذا الإصطلاح هذه الألفاظ ،وحدة، فرد، وكائن entity، ويؤكد اللفظان الأولان حقيقة أن كل حد هو «واحد» ، أما الثالث فمشتق من حقيقة أن كل حد له كينونة، يعنى يكون بمعنى أو بآخر . فالألفاظ : رجل، لحظة ، عدد ، فصل، علاقة، والغول ، أو أى شىء آخر يمكن ذكره هى بكل تأكيد حد؛ وإنكار أن شيئاً ما هو حد يجب أن يكون باطلا دائماً .

وقد يتبادر إلى الذهن أن اللفظة إذا كانت بمثل هذا العموم فلا يمكن أن تكون ذات فائدة تذكر . ولكن بعض النظريات الفلسفية الواسعة الانتشار تخطىء وجهة النظر هذه، فى الواقع نجد أن الحد له جميع الخصائص التى تنسب عادة للذوات أو المسميات . ولنبدأ بقولنا إن كل حد هو موضوع منطقى، مثلا موضوع القضية التى هى نفسها واحدة . كما أن كل حد لا يتغير ولا ينعدم. فالحد هو الحد، ولا يمكن أن نتصور تغييراً فيه لا يعدم شخصيته ويحوله إلى حد آخر [١]. وثم علامة أخرى تختص بها الحدود هو تطابقها العددى مع نفسها واختلافها العددى عن جميع الحدود الأخرى [٢]. والتطابق والاختلاف العددى هما مصدر الوحدة والكثرة ، وعلى ذلك فالتسليم بالحدود الكثيرة يهدم مبدأ الواحدية . ومن غير المنكور أن كل جزء من قضية يمكن عده كواحد وأنه

---

(١) فكرة الحد التى بسطناها هنا هى تعديل لفكرة الأستاذ ج . ا . مور فى مقالته عن : « طبيعة الحكم » فى مجلة Mind, N.S. No. 30 ، ومع ذلك فهذه الفكرة تختلف عن تلك فى بعض الجهات الهامة .

(٢) فيما يختص بالتطابق أنظر مقالة مور فى Proceedings of the Aristotelian Society, 1900-1901.

لا يمكن أن تحتوى القضية على أقل من جزءين . فالحد إذن لفظة مفيدة ، لأنها علامة الاختلاف بين مختلف الفلسفات وكذلك لأننا فى كثير من المناسبات نريد أن نتكلم عن « أى » حد أو عن حد « ما » .

٤٨ — ويمكن التمييز فى الحدود بين نوعين سأسميهما «أشياء» و«تصورات» على الترتيب . والأولى هى الحدود التى تدل عليها أسماء الأعلام، والأخرى هى ما تدل عليها جميع الألفاظ الأخرى .

وينبغى أن تفهم هنا أسماء الأعلام بمعنى أوسع بعض الشىء مما هو مألوف. وكذلك الأشياء تؤخذ على أنها تشمل كل شىء خاص مثل النقط ، واللحظات ، وأمور أخرى كثيرة لا تسمى عادة أشياء .

وفى التصورات نميز نوعين على الأقل، وهى ما تعبر عنه الصفات، وما تعبر عنه الأفعال . وسنسمى النوع الأول فى الغالب الأعم محمولات أو فصول تصورات .أما النوع الثانى فيسمى دائماً أو فى الأغلب الأعم علاقات (فى حالة الأفعال اللازمة تكون الفكرة التى يعبر عنها الفعل معقدة، وهو عادة يحكم بعلاقة معينة لمتعلق غير معين كما فى قولك « يتنفس محمد »).

وقد اتفقنا أنه من الممكن فى فصل كبير من القضايا أن نميز ، بطريقة أو أكثر ، بين الموضوع وما يحمل على هذا الموضوع . ويجب أن يحتوى المحمول دائماً على فعل ، وفيما عدا هذا لايبدو أن للمحمولات خواص عامة تقوم دائماً بها . ففى القضية العلاقية مثل « ا يكون أكبر من ب » يمكننا أن نعتبر ا هى الموضوع ، « يكون أكبر من ب » هى المحمول[1]. أو نعتبر ب هى الموضوع ، « ا يكون أكبر من » هى المحمول . وهكذا نجد أن فى هذه الحالات هناك طريقتان لتحليل القضية إلى موضوع ومحمول . وعندما تشتمل العلاقة على أكثر من حدين مثل « ا يكون هنا الآن »[2] هناك أكثر من طريقتين

---

(١) ترجمنا assertion فى هذا الموضع بالمحمول ، وقد ترجمناها فيما قبل بالحكم . ولذا لزم التنويه (المترجم) .

(٢) هذه القضية تعنى « ا يكون فى هذا المكان فى هذا الزمان » . وستبين فى الجزء السابع أن العلامة المصرح بها لا ترد إلى علاقة من حدين .

لإجراء التحليل . ولكن فى بعض القضايا لا توجد غير طريقة واحدة وهى القضايا الحملية مثل « سقراط إنسانى » والقضية « الإنسانية لسقراط » وهى تكافئ « سقراط إنسانى » فهى حكم يدور على الإنسانية ،ولكنها قضية متميزة بذاتها. وفى قولك « سقراط إنسانى » نجد أن المعنى الذى تعبر عنه كلمة «إنسانى» غير ذلك الذى تعبر عنه عندما نسميها إنسانية ، والفرق أنها فى الحالة الأخيرة تدور القضية «حول» هذا المعنى ،وليس الأمر كذلك فى الأولى. وهذا يشير إلى أن إنسانية هى تصورٌ وليس شيئاً . وسأتكلم عن حدود القضية بأنها تلك الحدود ، مهما تعددت ، الواردة فى القضية والتى يمكن اعتبارها موضوعات لهذه القضية . ومن خصائص حدود القضية أنه يمكن أن نضع أى شىء بدل أى حد من حدود القضية ، ومع ذلك نحصل على قضية . وعلى ذلك نقول إن « سقراط إنسانى » قضية لها حد واحد فقط ، أما ما تبقى من أجزاء القضية فأحدهما هو الفعل يكون والآخر هو المحمول بالمعنى الذى يرد فيه الفعل «يكون » فى هذه القضية ، لووضعنا بدلا من إنسان شيئاً آخر لا يكون محمولا فلن تكون هناك قضية على الإطلاق . فالمحمولات إذن هى تصورات ، غير الأفعال ، ترد فى قضايا ذات حد واحد أو موضوع واحد . فسقراط شىء لأنه لا يمكن أن يرد غير حد فى القضية . ولا يمكن استخدام سقراط ذلك الاستخدام الغريب المزدوج المتضمن فى إنسانى أو إنسانية. فالنقط ، واللحظات ، وقطع المادة ، والحالات الخاصة للعقل ، والموجودات الخاصة بصفة عامة هى أشياء بالمعنى السابق ، كما أنه هناك حدود لا وجود لها كالنقط فى الهندسة غير الأقليدية ، والشخصيات الوهمية فى الروايات . وجميع الفصول عندما تؤخذ كحد واحد هى أشياء مثل الأعداد والناس والفراغات. ولكن هذا مبحث سنعرض له فى الباب السادس .

وتتميز المحمولات عن الحدود الأخرى بعدد من الخصائص الهامة ومن أهمها صلة هذه المحمولات بما سأسميه « الدلالة ». فمن المحمول الواحد تنشأ طائفة من

المعانى المتصلة بها. ففضلا عن «إنسانى» و«إنسانية» التى لاتختلف إلامن الوجهة النحوية ، نجد«إنسان» ، «أحدالناس» «إنسانما»«أىإنسان» ، «كل إنسان» ، «جميع الناس» وجميعها متميزة حقاً الواحدة عن الأخرى. ودراسة هذه المعانى المختلفة حيوى للغاية لكل فلسفة رياضية ، وهذا ما يجعل نظرية المحمولات هامة .

٤٩ — وقد يظن أنه ينبغى أن نفرق بين التصور من حيث هو كذلك والتصور المستخدم حدا ، كأن نفرق بين يكون والكينونة ، وبين إنسانى وإنسانية وبين واحد فى القضية : «هذا واحد» وبين ١ فى «١ هو عدد». ولكن قبول وجهة النظر هذه سيكون من نتيجته أن نغرق فى بحر من الصعوبات . وطبيعى أن هناك فرقاً نحويا، وهذا يقابل فرقاً فى العلاقات . ففى الحالة الأولى نجد أن التصور المذكور يستخدم على أنه كذلك أى أنه يُحْمَل بالفعل على حد، أو يحكم به للربط بين حدين أو أكثر . أما فى الحالة الثانية فيقال إن التصور ذاته له محمول أو علاقة . وعلى ذلك فليست هناك صعوبة فى تفسير الفرق النحوى . ولكن ما أود بيانه هو أن الفرق فى العلاقات الخارجية فقط لا فى الطبيعة الذاتية للحدود. فإذا فرضنا مثلا أن هناك فرقاً بين واحد كصفة وبين ١ كحد ، ففى هذه العبارة أخذ «واحد» الصفة على أنه حد. وإذن فإما أن يكون واحد أصبح ١ ، وفى هذه الحالة يكون هذا الفرض مناقضاً لنفسه ، وإما أن هناك فرقاً آخر بين واحد ، ١ ، بالإضافة إلى حقيقة أن الأول يدل على تصور ليس حدا بينما يدل الثانى على تصور هو حد . ولكن هذا الفرض الأخير يقتضى أن تكون هناك قضية حول واحد « كحد » ، وعلينا أن نقبل أن القضايا حول واحد كصفة هى غير تلك التى فيها واحد كحد . ومع ذلك فيجب أن تكون جميع القضايا التى من هذا النوع باطلة ، لأن قضية حول واحد كصفة تجعل «واحد» هو الموضوع ، وتكون إذن حول واحد كحد .

وبالاختصار : إذا كانت هناك صفات لا يمكن جعلها مسميات دون تغيير المعنى ، فإن جميع القضايا حول هذه الصفات باطلة (لأنها بالضرورة تحولها إلى حدود) . وتكون باطلة كذلك القضية التى تقول إن هذه القضايا

باطلة ، لأن هذا ذاته يحول الصفات إلى مسميات . ولكن هذا خُلفٌ .

وهذا الكلام يبين أننا كنا على حق عندما قلنا إن الحدود تشمل كل شيء يمكن أن يرد فى قضية مع احتمال استثناء مجموعات الحدود التى يدل عليها قولك «أى» أو أية لفظة شبيهة[1]. لأنه إذا وردت ا فى قضية فإنها فى هذا النص هى الموضوع . وقد رأينا أنه إذا حدث ولم تكن ا هى الموضوع فإنها تكون عدديا وبالضبط نفس ا التى ليست موضوعاً فى قضية وموضوعاً فى قضية أخرى فى نفس الوقت . وبذلك يظهر الخطأ والتناقض فى كل نظرية تقول إن هناك صفاتاً أو توابع أو أشياء مثالية أو بأى اسم تسميها ، أقل مادية أو أقل وجوداً أو أقل تطابقاً مع نفسها من المسميات الحقة . فالحدود التى هى تصورات تختلف عن الحدود التى ليست كذلك ، لا بالنسبة إلى قوامها بذاتها ، ولكن لأنها ترد فى بعض القضايا الصادقة أو الكاذبة فى شكل يختلف (بطريقة لا يمكن تعريفها) عن الشكل الذى ترد فيها الموضوعات أو حدودالعلاقات .

٥٠ — وقد يختلف تصوران اختلافا آخر يمكن أن يسمى تصوريا ، وذلك علاوة على اختلافهما العددى الذى هو نتيجة اعتبارهما حدين .

ويتميز هذا الاختلاف بأن تصورين إذا وقعا فى قضيتين لا كحدين ، فإن القضيتين حتى إذا كانا متطابقتين من كل وجه آخر ، فإنهما يختلفان من من جهة أن التصورين الواقعين مختلفان تصوريا . والتعدد التصورى يلزم عنه التعدد العددى ولكن العكس ليس صحيحاً ، لأن جميع الحدود ليست تصورات ، والتعدد العددى كما يدل الاسم هو مصدر الكثرة أما التعدد التصورى فأقل أهمية بالنسبة للرياضة . ولكن إمكان وضع أحكام مختلفة حول حد معلوم أو مجموعة حدود يتوقف على التعدد التصورى ، وهو من أجل ذلك أساسى للمنطق العام .

٥١ — وإنه لمما لا يخلو من الفائدة أو الأهمية أن نفحص باختصار الصلة بين المذهب الذى ذكرناه عن الصفات وبين بعض المذاهب التقليدية عن

---

(١) انظر الباب الآتى .

طبيعة القضايا . وقد جرت العادة على اعتبار أن لجميع القضايا موضوعاً ومحمولاً ، أى أن لها مشاراً إليه مباشراً ، وتصوراً عاماً يرتبط به عن طريق الوصف . وسيقول أصحاب هذه النظرية أن وضعها بهذه الكيفية غير دقيق بالمرة ، ولكنه يكفى لبيان وجهة النظر التى نحن بصدد بحثها . وهذه النظرية قد اقتضتها حاجة منطقية داخلية فى نظرية «برادلى» المنطقية ، وهى التى تقول إن جميع الألفاظ تدل على أفكار لها ما أسماه برادلى « معنى » وأن فى كل حكم يوجد شى مـّا ، هو الموضوع الحق للحكم ، وهو ليس فكرة وليس له معنى . ويبدو لى أن تحصيل المعنى فكرة غير واضحة مركبة من عناصر منطقية وأخرى نفسية . فجميع الألفاظ ذات معان من جهة أنها رموز تدل على أشياء غير ذاتها . ولكن القضية إذا لم تكن مجرد قضية لغوية ، لا تحتوى بذاتها على ألفاظ ولكنها تحتوى على الموجودات التى تدل عليها الألفاظ وبذلك يكون المعنى فى قولك إن للألفاظ معان ، شيئاً غريباً عن المنطق . ولكن هذه التصورات مثل إنسان لها معنى من جهة أخرى . فهى كما لو كانت رموزاً بطبيعة منطقها ، لأن لها الخاصية التى سأسميها الدلالة . فحين يرد إنسان فى قضية ، مثل قولك : « قابلت إنسانا فى الشارع » فإن القضية ليست حول التصور إنسان ، ولكنها حول شىء مختلف تماماً ، حول شىء بالفعل ذى قدمين يدل التصور عليه . فالتصورات التى من هذا النوع لها معان غير نفسانية . وعلى هذا النحو إذا قلنا « هذا إنسان » فإننا نتكلم عن قضية فيها تصور غير متصل بنحو مـّا بما ليس تصوراً ، ولكن عندما نفهم المعنى على هذا النحو فإن الشىء الذى تدل عليه لفظة «جون» لا يكون له معنى كما ذهب إلى ذلك برادلى[1] . وحتى بين التصورات لا نجد معنى إلا لتلك التى لها دلالة . وفى اعتقادى أن هذه الحالة المشوشة ترجع أكثر ما ترجع إلى فكرة أن الألفاظ ترد فى القضايا ، وهو ما يرجع بدوره إلى الاعتقاد بأن القضايا هى أساساً عقلية ، وأنه يجب أن تطابق معارفنا ، ولكن هذه الموضوعات هى من موضوعات الفلسفة العامة ولا ينبغى أن نسير فى بحثها إلى أبعد من هذا فى هذا الكتاب .

(١) Logic, Book 1, Chap. 1, †† 17, 18 (p.p 85-06) .

٥٢ – بقى أن ندرس الفعل ، وأن نجد علامات تميزه عن الصفة . وهناك بالنسبة للأفعال كذلك صيغتان نحويتان تقابلان فرقاً فى مجرد العلاقات الخارجية . فهناك الصيغة التى للفعل كفعل (ونترك هنا تصريف هذه الصيغة) . وهناك اسم الفعل الذى يعبر عنه بالمصدر ، أو اسم الفاعل . والفرق هو كل الفرق بين قولك « زيد قتل عمراً » وقولك « القتل ليس اغتيالاً ». وبتحليل هذا الفرق تظهر طبيعة الفعل وعمله .

وواضح أن التصور الواضح فى اسم الفعل هو بذاته الواقع فى الفعل . وهذا ينتج عن بحثنا السابق من أن كل جزء من كل قضية ينبغى أن يكون من من الممكن جعله موضوعاً منطقياً. وإلا وقعنا فى خُلْف. فإذا قلنا إن « يقتل لا تعنى نفس ما يعنيه القتل » نكون قد جعلنا «يقتل»موضوعاً. ولا يمكن القول إن التصور الذى تعبر عنه لفظة يقتل لا يمكن أن يكون موضوعاً . وكذلك نرى أن نفس الفعل الذى يقع فعلاً يمكن أن يقع موضوعاً . والسؤال هو : ما الفرق المنطقى الذى يعبر عنه الفرق فى الصيغة النحوية . وواضح أن الفرق يجب أن يكون فرقاً فى العلاقات الخارجية ، ولكن هناك أمراً آخر بالنسبة للأفعال . فعند تحويل الفعل ، كما يرد فى قضية ، إلى اسم فعل ، يمكن تحويل القضية كلها إلى موضوع منطقى واحد ، لم يعد حكما ، ولم يعد يشتمل فى نفسه على صدق أو كذب . وهنا كذلك لا يبدو من الممكن التمسك بأن الموضوع المنطقى الناتج هو شىء مغاير للقضية . ونوضح هذا بالعبارتين « مات قيصر » ، « موت قيصر » فإذا سألنا ماذا نقرر فى القضية « مات قيصر » فالجواب « موت قيصر هو الذى يحكم به » . فى تلك الحالة يبدو أن موت قيصر هو الذى يحتمل الصدق والكذب . ومع ذلك فلا الصدق ولا الكذب يتعلق بموضوع منطقى . ويبدو أن الجواب هنا أن موت قيصر له علاقة خارجية بالصدق أو الكذب (كيفما يكون الحال) . بينما « مات قيصر » تحمل فى طياتها صدقها أو كذبها كعنصر من عناصرها . ولكن إذا كان هو هذا التحليل الصحيح فمن العسير

أن نرى كيف تختلف « مات قيصر » عن « صدق موت قيصر » فى حالة الصدق ، ولا عن « كذب موت قيصر » فى حالة الكذب . ومع ذلك فإنه واضح تماماً أن العبارة الأخيرة على الأقل لا تكافئ بالمرة قولك « مات قيصر » ويظهر أن هناك فكرة أولية للحكم تؤخذ من الفعل ، وتضيع هذه الفكرة عند تحويله إلى اسم فعل كما تضيع عندما نجعل القضية التى نحن بصددها موضوعاً لقضية أخرى . وهذا لا يتوقف على الصيغة النحوية . لأنى إذا قلت « مات قيصر هى قضية » فأنا لا أحكم بأن قيصراً قد مات بالفعل، وبذلك يختفى عنصر كان موجوداً فى قولك « مات قيصر ». ويظهر أن التناقض الذى أردنا تحاشيه والخاص بالشىء الذى لا يمكن أن يكون موضوعاً منطقياً ، قد أصبح لا مناص منه . ولست أدرى كيف أعالج هذه الصعوبة علاجاً مقبولاً ، ويظهر أنها متعلقة بطبيعة الصدق والكذب ذاتها . وقد يكون أوضح طريق أن نقول إن الفرق بين القضية المحكوم بها، والقضية غير المحكوم بها ليس فرقاً منطقياً،ولكنه نفسانى . ولا شك أن هذا صحيح إذا كان من الممكن الحكم فى القضايا الكاذبة . ولكن هناك نوعاً آخر من الحكم ، يصعب جداً تقريبه بوضوح للعقل ، ومع ذلك لا يمكن إنكاره ، وهو القضايا الصادقة فقط التى يحكم فيها . فالقضايا الصادقة والباطلة على السواء هى من بعض الوجوه أشياء ، ويمكن أن تكون موضوعات منطقية ، ولكن عندما يحدث أن تكون القضية صادقة تكون لها خاصية أخرى فوق تلك التى تشترك فيها مع القضايا الكاذبة ، وهذه الخاصية هى ما أعنيه عند الكلام عن الحكم بالمعنى المنطقى على أنه مغاير للمعنى النفسانى . ولكن طبيعة الصدق ليست متعلقة بمبادئ الرياضة بأكثر مما هى متعلقة بكل شىء آخر . وعلى ذلك فسأترك هذا السؤال للمناطقة مكتفياً بالإشارة السابقة المختصرة إلى هذه الصعوبة .

٥٣ — وقد نتساءل أكل شىء من وجهة النظر المنطقية التى تهمنا إذا كان فعلا فهو يعبر عن علاقة أو لا . ويبدو من الواضح أننا لو كنا محقين فى اعتبار

«سقراط هو إنسان»[١] قضية ذات حد واحد فقط ، فإن «هو» فى هذه القضية لا يمكن أن تعبر عن علاقة بالمعنى المعتاد . وفى الواقع تتميز القضايا الحملية بهذه الصفة التى لا تعبر عن علاقة . ومع ذلك فلا بد أن هناك علاقة متضمنة بين سقراط والإنسانية ، ومن الصعب أن نتصور أن القضية لا تعبر عن علاقة . وقد يكون فى الإمكان أن نقول إنها علاقة، متميزة عن غيرها من العلاقات بأنها لا يمكن أن تعتبر حكماً متعلقاً بأىٍّ من حدّيها بدون تمييز ولكنها حكم على المتعلق به. ويمكن تطبيق نفس الكلام على القضية « ا يكون » التى تتعلق بكل حد دون استثناء .و«يكون» هنا مختلفة تمام الاختلاف عن « يكون» فى قولك « سقراط إنسان » (فى اللغة الإنجليزية) ويمكن اعتبارها مركبة وعلى أنها فى الحقيقة تحمل الكينونة على ا وبهذه الطريقة يمكن اعتبار الفعل المنطقى الصحيح فى قضية على أنه يقرر دائماً علاقة . ولما كان من الصعب أن نعرف بالضبط المقصود بالعلاقة فإن هناك خطراً أن تصبح المسألة كلها مسألة لفظية .

٥٤ — وإذا سلمنا بأن جميع الأفعال هى علاقات ، أمكن أن يظهر من طبيعة الفعل المزدوجة ، — الفعل كفعل ، والفعل كاسم الفعل — على أنها الفرق بين العلاقة فى حد ذاتها ، والعلاقة التى تربط فى الواقع . خذ مثلاً قولك « ا تختلف عن ب » وعند تحليل هذه القضية نجد أن أجزاءها هى ا واختلاف و ب فقط . ومع ذلك فإن هذه الأجزاء إذا وضعت جنباً إلى جنب لا تتكون منها القضية مرة ثانية. فالاختلاف الوارد فى القضية يربط فعلاً بين ا ، ب بينما الاختلاف بعد التحليل هو فكرة لا صلة له بكل من ا ، ب . ويقال إنه كان ينبغى عند التحليل أن نذكر العلاقة القائمة بين اختلاف وبين ا ، ب وهى العلاقات التى يعبر عنها «يكون» ، عند ما نقول « ا مختلفة عن ب » (فى الصيغة الإنجليزية). وهذه العلاقات تتكون من أن ا متعلق به وأن ب متعلق بالنسبة

---

(١) فى الأصل الإنجليزى is فى العبارة Socrates is a man وسنترجم الرابطة بعد قليل بلفظة « يكون » (المترجم)

لكلمة اختلاف . ولكن ا متعلق به ، اختلاف ، هى أيضاً مجرد حدود قائمة وليست قضية . فالقضية هى فى الواقع أساساً وحدة ، وعندما يهدم التحليل هذه الوحدة ، فإن مجرد سرد الأجزاء لا يعيد بناء القضية . فالفعل عندما يستخدم كفعل يحمل فى طياته وحدة القضية ، وبذلك يتميز عن الفعل الذى نعتبره حدا . ومع ذلك فلست أدرى كيف أستطيع أن أعطى صورة واضحة مضبوطة عن طبيعة هذا التمييز .

٥٥ — وقد نتساءل عما إذا كان التصور العام « اختلاف » وارداً حقاً فى القضية « ا تختلف عن ب » أم أن هناك اختلافاً بين ا ، ب واختلافاً نوعيا آخر بين حـ ، ء وهما ما نقرره فى « ا تختلف عن ب » و « حـ تختلف عن ء » وبهذه الطريقة يصبح « اختلاف » فصل تصور له من الحالات الخاصة بقدر ما له فى الحدود المختلفة من أزواج . أما الحالات الخاصة فيمكن أن يقال عنها بالتعبير الأفلاطونى أنها تشترك فى طبيعة الاختلاف . ولما كانت هذه المسألة حيوية بالنسبة لنظرية العلاقات فيحسن أن نقف عندها قليلاً . إنما ينبغى أن أشير — بادئ ذى بدء — أنى عندما أقول « ا تختلف عن ب » فإننى أقصد مجرد الفرق العددى الذى بسببه هما اثنان ، لا الاختلاف فى هذا الأمر أو ذاك .

ولنجرب الآن افتراض أن اختلافاً معينا هى فكرة مركبة من اختلاف ، ومن صفة خاصة تميز اختلافاً خاصا عن كل اختلاف خاص آخر . وطالما كنا معنيين بعلاقة الاختلاف ذاتها فلا يمكن التمييز بين الحالات المختلفة ، ولكن علينا أن نفترض أنه توجد صفات مختلفة متعلقة بالحالات المختلفة . ولما كانت الحالات تتميز بحدودها فإن الصفة يجب أن تتعلق أصلاً بالحدود لا بالاختلاف . فإذا لم تكن الصفة علاقة فلا يمكن أن تكون لها صلة خاصة بالاختلاف بين ا ، ب الذى أريد تمييزه عن مجرد الاختلاف ، وإذا لم تنجح فى ذلك تصبح عديمة الفائدة . ومن جهة أخرى إذا كانت هناك علاقة أخرى بين ا ، ب

أسمى من علاقة الاختلاف كان علينا أن نسلم أن هناك علاقتين بين أى حدين ، اختلاف ، واختلاف نوعى ، وهذا الأخير غير قائم بين أى حدين آخرين . ووجهة النظر هذه تجمع بين وجهتين أخريين : تقول الأولى إن العلاقة العامة المجردة للاختلاف ذاتها تقوم بين ا ، ب؛ وتقول الثانية: إنه عندما يختلف حدان فإن لهما، نتيجة لهذه الحقيقة، علاقة اختلاف نوعية ، فريدة، لا يمكن تحليلها ولا يشترك فيها أى زوج آخر من الحدود . ويمكن قبول أى وجهة من وجهتى النظر هذه دون إنكار أو إثبات لوجهة النظر الأخرى . ولننظر الآن فيما يمكن أن يقال فى صالح كل منهما ، وما يمكن أن يقال ضدهما .

فما يؤخذ على فكرة الاختلاف النوعية ، أنه لو اختلفت الاختلافات فإن اختلافاتها فيما بينها يجب أن تختلف أيضاً ، وبذلك نقع فى تسلسل لا نهاية له . والذين يعترضون على العمليات التى لا نهاية لها يرون فى هذا برهانا على أن الاختلافات لا تختلف . ولكننا نسلم فى هذا الكتاب بأن ليس هناك تناقض خاص بفكرة اللانهاية ، وأنه لا يمكن الاعتراض على العملية التى لا تنتهى إلا إذا نشأ هذا الاعتراض من تحليل المعنى الواقعى لقضية ما . والحالة التى نحن بصددها هى حالة لزوم وليست حالة تحليل، وعلى ذلك فهى مما لا اعتراض عليـــه .

ومما يؤخذ على فكرة قيام علاقة الاختلاف المجردة بين ا ، ب هو الحجة المشتقة من تحليل « ا يختلف عن ب » والتى أدت إلى هذا البحث . ونلاحظ أنّ الفرض الذى يجمع بين الاختلاف العام والاختلاف النوعى يفترض وجود قضيتين متميزتين إحداهما تقرر الاختلاف العام ، والثانية تقرر الاختلاف النوعى . فإذا لم يكن بين ا ، ب اختلاف عام فإن هذا الفرض يكون مستحيلاً . وقد رأينا كيف ضاع عبثاً كل مجهود لتجنب قصور التحليل بأن جعلنا معنى « ا تختلف عن ب » يتضمن علاقات الاختلاف بين ا ، ب . وهذه المحاولة تؤدى فى الواقع إلى عملية لا نهاية لها ولا يمكن قبولها ، لانه علينا أن نضمن

العلاقات للعلاقات المذكورة لكل من ا ، ب واختلاف، وهكذا، وعلى هذا النحو المتزايد التعقيد نفترض أننا إنما نحلل معنى قضيتنا الأصلية . وهذا البحث يثبت أمراً غاية فى الأهمية وهو أنه عندما تقوم علاقة بين حدين ، فإن علاقات هذه العلاقة بالحدين وعلاقة هذه العلاقات بالعلاقة وبالحدود وهكذا إلى ما لا نهاية له، ليست جزءاً من معنى هذه القضية، مع أنها جميعاً تلزم عن القضية التى تقرر العلاقة الأصلية .

ولكن هذا الكلام لا يكفى لإثبات أن العلاقة بين ا ، ب لا يمكن أن تكون اختلافاً مجردا . وبقيت وجهة النظر القائلة أن لكل قضية نوعاً من الوحدة التى لا يمكن أن يبقى عليها التحليل بل يهدمها، حتى لو ذكر فى التحليل أنها عنصر من عناصر القضية . ومما لا شك فيه أن لوجهة النظر هذه صعوباتها . ولكن وجهة النظر الأخرى القائلة بأنه لا يمكن أن يكون لزوجين من الحدود نفس العلاقة لها أيضاً صعوباتها الخاصة، وتقصر عن حل المسألة التى وضعت من أجلها . لأنه حتى لو كان الاختلاف بين ا ، ب خاصاً تماماً بـ ا ، ب فإن الحدود الثلاثة ا ، ب ، اختلاف ا عن ب لا تعيد تكوين القضية « ا يختلف عن ب » مثلها فى ذلك مثل ا ، ب ، اختلاف — ويبدو واضحاً أنه حتى إذا اختلفت الاختلافات فإنه لا بد أن يكون بينها شىء مشترك . ولكن أعم طريقة يمكن بها أن يكون لحدين شىء مشترك هى أن يكون لكليهما علاقة بحد معلوم . وعلى ذلك فإذا لم يكن لزوجين اثنين من الحدود نفس العلاقة فإنه لا يمكن أن يكون لحدين شىء مشترك، ولا يمكن أن تكون الاختلافات المختلفة ، فى أى معنى يمكن تعريفه ، حالات خاصة من الاختلافات[1] . ونصل إذن إلى أن العلاقة المقررة بين ا ، ب فى القضية « ا تختلف عن ب » هى علاقة الاختلاف

---

(١) يظهر أن الحجة المذكورة تثبت أن نظرية مور عن الكليات ذات الأمثلة المتعددة والتى ذكرها فى بحثه عن التطابق Proceedings of the Aristotelian Soc. 1900-1901 لا يجب أن تطبق على جميع التصورات . وعلاقة الفرد بالكلى الداخل فيه يجب على كل حال أن يكون فعلا وعدداً الفرد نفسه فى جميع الأحوال التى يقع فيها .

العامة ، وهى ذاتها بالضبط ومن الوجهة العددية نفس العلاقة المقررة بين حـ ، ء فى القضية « حـ تختلف عن ء » . ويجب أن نسلم أن وجهة النظر هذه ، ولنفس الأسباب ، صحيحة لجميع العلاقات الأخرى ، فالعلاقات ليست لها حالات خاصة ، ولكنها هى ذاتها بالضبط فى جميع القضايا التى تدخل فيها .

ونلخص الآن النقط الرئيسية التى برزت فى كلامنا عن الفعل . فقد رأينا أن الفعل هو تصورٌ ،مَثَله فى ذلك مَثَل الصفة، يمكن أن يحصل فى قضية دون أن يكون أحد حدودها ، مع أنه يمكن أيضاً أن يصبح موضوعاً منطقياً . وفى كل قضية يجب أن يدخل فعل واحد فقط كفعل ، على أن كل قضية يمكن تحويلها إلى موضوع منطقى مفرد بتحويل فعلها إلى اسم فعل . وسأسمى هذا النوع من الموضوع المنطقى تصور قضية . وكل فعل ، بالمعنى المنطقى للكلمة ، يمكن اعتباره علاقة . فهو يربط فعلاً عندما يدخل كفعل ، وعندما يدخل كاسم فعل فإنه يسند مجرد العلاقة مستقلة عن الحدود . والأفعال ، على عكس الصفات ، ليست لها حالات خاصة، ولكنها متطابقة فى جميع أحوال ورودها . وبفضل الطريقة التى يؤدى بها الفعل فعلاً تعليق حدود القضية ، فلكل قضية وحدة تجعلها متميزة عن مجموع أجزائها . وكل هذه النقاط تجر إلى مسائل منطقية تستحق أن تبحث بحثاً وافياً فى مؤلفات علم المنطق .

أما وقد وضعنا صورة عامة عن طبيعة الأفعال والصفات فسنبحث فى البابين القادمين فى مناقشات تنشأ من النظر فى الصفات ،وفى الباب السابع فى تلك التى تدور حول الأفعال . ويمكن القول بصفة عامة أن الفصول متصلة بالصفات، وأن دوال القضايا تتضمن الأفعال . وهذا هو السبب الذى حدا بنا إلى الإفاضة فى موضوع يبدو لأول وهلة بعيداً نوعاً ما عن مبادئ الرياضيات .

الباب الخامس

الدلالة

٥٦ — إن معنى الدلالة ، شأنه شأن كثير من الأفكار المنطقية ، قد طمس فى الماضى بخلطه خلطاً غير مناسب بعلم النفس . وعندما نشير أو نصف أو نستخدم الألفاظ كرموز للتصورات فإننا ندل بشكل من الأشكال ، ولكنه ليس الشكل الذى أنوى بحثه فيما يلى . وما يجعل الوصف ممكنا — أى أننا نستطيع باستخدام التصورات أن نعين شيئاً هو فى ذاته ليس تصوراً — وجود علاقة منطقية بين بعض التصورات وبعض الحدود . وبفضل هذه العلاقة تدل هذه التصورات بشكل طبيعى ومنطقى على هذه الحدود . وهذا المعنى من الدلالة هو موضوع بحثنا هنا . .

وهذا المعنى هو (فى نظرى) أساس جميع نظريات الجوهر ، ومنطق الموضوع والمحمول ، كما أنه أساس التقابل بين الأشياء والأفكار ، وبين الفكر الاستدلالى والإدراك المباشر . ويبدو لى أن معظم هذه الاتجاهات المختلفة خاطئ ، بينما الحقيقة الأساسية ذاتها التى نشأت عنها هذه الاتجاهات قلما بحثت بحثاً منطقيا بحتـــا .

والتصور «يدل» إذا ورد فى قضية ، ولا تكون القضية «حول» التصور ، ولكنها تدور حول حد متصل بطريقة خاصة بهذا التصور . فإذا قلت «لقد قابلت رجلاً» فالقضية ليست حول « رجلا » فهذا تصور لا يمشى فى الشارع ، ولكنه يعيش فى طيات كتب المنطق . فالذى قابلته كان شيئا وليس تصوراً ، كان رجلاً واقعياً له حائك ملابس ، وحساب فى المصرف ، ومنزل ، وزوجة . وكذلك القضية « أى عدد متناه فهو فردى أو زوجى » هى قضية من الواضح أنها صادقة ، بينما

التصور « أى عدد متناه » ليس فردا أو زوجا . فالأعداد الخاصة هى التى تكون فردية أو زوجية، ولا يوجد فضلاً عنها شيء آخر ،أى عدد يمكن أن يكون زوجيا أو فرديا ، وإذا وجد فإنه من الواضح أنه لا يمكن أن يكون فرديا ولا أن يكون زوجيا . فإذا تكلمنا عن التصور « أى عدد » فإننا نجد أن جميع القضايا تقريبا التى تشتمل على العبارة « أى عدد » هى قضايا كاذبة . وإذا أردنا الكلام عن التصور وجب أن نبين هذه الحقيقة بشكل خاص فى المطبعة أو باستخدام الأقواس . وكثيراً ما يقول الناس إن الإنسان فان ، ولكن كل ما هو فان سيموت، ومع ذلك فمن العجيب حقًّا أن نطالع فى جريدة صباحية الإعلان التالى : توفى فى مسكنه بشارع كيت بمدينة كيت فى الثامن عشر من شهر يونية عام ١٩٠٠ —، والانسان أكبر أبناء الموت والخطيئة . فى الواقع الإنسان لا يموت؛ فإذا كان القول « الإنسان فان » قضية حول الإنسان لوجب أن تكون كاذبة . الواقع أن القضية حول الناس. وهنا أيضاً ليست القضية حول التصور « الناس» ، ولكنها حول مايدل عليه هذا التصور. وجميع نظريات التعريف ،والتطابق ، والفصول ، والرمزية والمتغير ، كلها مطوية فى نظرية الدلالة . والفكرة أساسية فى المنطق ، ورغم صعوبتها فإن من الأمور الجوهرية أن نكوّن صورة واضحة عنها ما أمكن ذلك .

٥٧ — ويمكن أن نحصل على فكرة الدلالة كنوع من التوالد المنطقى من قضايا الموضوع والمحمول — وهى التى يظهر أنها تتوقف عليها إلى حد ما . وأبسط القضايا هى تلك التى تحتوى على محمول واحد لا كحد، وتحتوى على حد واحد يسند إليه المحمول المذكور . ومثل هذه القضايا يطلق عليها اسم قضايا الموضوع — المحمول. والأمثلة على ذلك ا هو [١]، و ا هو واحد، و ا هو إنسانى. والتصورات التى هى محمولات يمكن أن تسمى فصول تصورات لأن الفصول تنشأ منها ، ولكنا سنجد من الضرورى أن نميز بين كلمتى محمول وفصل تصور . والقضايا التى من النوع «موضوع — محمول » دائما يلزم عنها وتلزم عن قضايا من ذلك النوع الذى يقرر أن الفرد تابع لفصل . وعلى ذلك تكون الأمثلة السابقة مكافئة

(١) ا هو تقابل فى الإنجليزية A is [المترجم] .

ا : اهى شيء، ا هى الوحدة ، ا إنسان . وهذه القضايا الجديدة ليست مطابقة للسابقة ، لأن لها صورة مخالفة مخالفة كلية للصورة الأولى . فأولا نجد أن «هى» هنا[١] عبارة عن التصور الوحيد الذى لا يستخدم كحد . كذلك سنجد أن إنسانا لا هى التصور ولا الحد ولكنها خليط خاص من حدود خاصة وهى تلك الحدود التى نسميها إنسانية . وعلاقة سقراط بـ «إنسان» مختلفة تماما عن علاقته بالإنسانية ، ففى الواقع يجب النظر إلى « سقراط إنسانى» لا على أنها حكم على علاقة بين سقراط والإنسانية ، لأن وجهة النظر هذه تجعل « إنسانى» ترد كحد فى « سقراط إنسانى» . حقاً أنه مما لا ينكر أن علاقته بالإنسانية تلزم عن « سقراط إنسان » وهى العلاقة التى يعبر عنها فى « سقراط له إنسانية» وهذه العلاقة بالعكس تلزم عنها قضية الموضوع المحمول . ولكنا نستطيع التمييز بين القضيتين تمييزاً واضحاً ، ومن المهم فى نظرية الفصول أن نفعل ذلك . فلدينا فى حالة كل محمول ثلاثة أنواع من القضايا تستلزم الواحدة منها الأخرى وهى : « سقراط إنسانى » و « سقراط له إنسانية » و « سقراط إنسان » فالقضية الأولى تشتمل على حد ومحمول ، والثانية على حدين وعلاقة (الحد الثانى مطابق لمحمول القضية الأولى [٢]) بينما تشتمل القضية الثالثة على حد وعلاقة وما سأسميه انفصالا (وهو اصطلاح سأشرحه بعد قليل)[٣] .

ولا يختلف فصل التصور إلا قليلاً أولا يختلف أصلا عن المحمول . ولكن الفصل باعتباره مقابل فصل التصور فهو ما اجتمع من جميع الحدود التى لها المحمول المعلوم . فالعلاقة الواردة فى النوع الثانى « سقراط له إنسانية» تتميز كلية بأنه يلزم عنها وتلزم عن قضية ذات حد واحد ، أما الحد الثانى من حدود

---

(١) فى الأصل الإنجليزى is ، وذلك فى العبارة "A is a-man" (المترجم)

(٢) انظر بند ٤٩ .

(٣) هناك قضيتان يعبر عنهما بنفس الألفاظ ، وهما "Socrates is a-man" "Socrates is-a man"; والملاحظات الواردة فى المتن تنطبق على القضية الأولى ، وفيما بعد ، إلا إذا أشرنا إلى العكس بعلامة خاصة، فالمقصود هو القضية الثانية . والأولى تعبر عن تطابق سقراط وفرد غامض، أما الثانية فإنها تعبر عن علاقة سقراط بفصل التصور إنسان ".[المؤلف] (المترجم– ولم ننقل القضيتان إلى العربية)

العلاقة فيها فقد أصبح محمولاً . فالفصل مجموعة خاصة من الحدود، وفصل التصور ذو صلة وثيقة بالمحمول، ويحدد فصل التصور الحدود التي يجمعها الفصل . فالمحمولات ، من وجهة نظر معينة ، أبسط أنواع التصورات ، لأنها تدخل فى أبسط أنواع القضايا .

٥٨ – ويرتبط بكل محمول عدد كبير من التصورات المتصلة به اتصالاً وثيقاً . وهى تصورات من المهم أن نميز بينها فى الحالات التى تكون فيها متميزة عن بعضها البعض. فإذا بدأنا مثلاً بإنسانى فلدينا إنسان، وناس، وجميع الناس، وأى إنسان، والجنس البشرى، وجميعها ما عدا الأول لها معنى مزدوج، أى تصور دال وموضوع مدلول عليه .كذلك لدينا « إنسان وإنسان مَّا» وهما يدلان على أشياء غير ذاتهما . وينبغى أن نتذكر دائماً هذا الجهاز الواسع المتصل بالمحمول، كما ينبغى أن نحاول تحليل جميع الأفكار السابقة . ولكننا فى الوقت الحاضر سنعنى بخاصية الدلالة أكثر من عنايتنا بالتصورات المختلفة الدالة .

واقتران التصورات لكى تكون تصورات جديدة أكثر تعقيداً من مركباتها موضوع قال عنه الذين كتبوا عن المنطق الشئ الكثير . أما اجتماع الحدود لكى تكون ما يمكن أن يسمى – من باب التمثيل – حدوداً مركبة ، فهو موضوع لم يتحدث لنا عنه المناطقة – حديثهم وقديمهم – إلا القليل النادر ، مع أن الموضوع ذو أهمية حيوية بالنسبة لفلسفة الرياضيات، نظراً لأن طبيعة العدد والمتغير على السواء تدور حول هذه النقطة . وتتميز الرياضة بست من الألفاظ التى نستخدمها فى حياتنا اليومية ؛ وهذه الألفاظ هى : جميع ، كل، أى، وأداة التنكير ، وبعض، وأداة التعريف ال . ولكى يستقيم التفكير الصحيح ينبغى أن نميز بين هذه الألفاظ بشكل واضح، ولكن هذا الموضوع يعج بالصعوبات، وقد أهمله المناطقة إهمالاً يكاد يكون تاما .

ونلاحظ أول الأمر أنه من الواضح أن كل عبارة تشتمل على إحدى هذه الألفاظ الست فإنها تدل دائماً . ومن المفيد فى بحثنا الحاضر أن نميز بين

فصل التصور وبين المحمول. وسأسمى «إنسانى» محمولاً و«إنسان» فصل التصور وإن كان الفرق لفظياً فقط . وخصائص فصل التصور التى تميزه عن الحدود عامة هى أن « س هى و » دالة قضية عندما تكون و فصل تصور ، ولا تكون دالة قضية إلا فى هذه الحالة فقط . ويجب أن نسلم بأنه عندما لا تكون و فصل تصور لا نحصل على قضية كاذبة ، بل لا نحصل على القضية بالمرة مهما أعطينا س من قيم . وهذا يمكننا من تمييز فصل تصور ينتمى لفصل صفرى فيه جميع القضايا من النوع السابق كاذبة ، عن حد ليس فصل تصور بالمرة ليس فيه قضايا من النوع السابق . وهو كذلك يوضح أن فصل التصور ليس حداً فى القضية « س هى و » لأن تغير و مقيد إذا أردنا أن تبقى الصيغة قضية : ويمكننا أن نقول الآن : إن العبارة الدالة تتكون دائماً من فصل تصور مسبوق بإحدى الألفاظ الست السابقة أو بمرادف لإحداها .

٥٩ — والسؤال الذى يصادفنا أول كل شىء بالنسبة للدلالة هو : أهناك طريقة واحدة للدلالة على ست أنواع مختلفة من الأشياء ، أم أن طرق الدلالة مختلفة ؟ وفى الحالة الثانية : هل الشىء المدلول عليه هو ذاته فى جميع الحالات الست أم أن الشىء يختلف كما تختلف الطريقة الدالة عليه ؟ ولكى نتمكن من الإجابة على هذا السؤال ينبغى أن نشرح الفروق القائمة بين هذه الألفاظ الست المذكورة . وهنا يحسن أن نترك جانباً لفظة ال (أداة التعريف) فى أول الأمر ، لأن هذه اللفظة لها مركز مخالف لمركز الباقى ، وهى خاضعة لقيود لا تخضع لها الألفاظ الأخرى .

وفى الحالات التى يكون فيها الفصل المعرف لفصل التصور مكونا من عدد متناهٍ من الحدود يمكن أن نحذف فصل التصور كلية ، وندل على مختلف الأشياء المدلول عليها بتعداد الحدود ، وربطها بواسطة أداة العطف «و» أو «أو» كيفما يكون الحال . ومن المفيد أن نعزل جزءا من المشكلة إذا نظرنا أولا فى هذه الحالة ولو أن

تصور اللغة يجعل من الصعب إدراك الفرق بين الأشياء التى تدل عليها نفس الصيغة من الألفاظ .

والآن دعنا نبدأ باعتبار حدين اثنين فقط مثلاً زيد وخالد ، فالأشياء الدالة عليها جميع ، كل ، أى ، أداة التنكير ، وبعض على الترتيب متمثلة فى القضايا الخمس الآتية :

(١) زيد وخالد هما اثنان من خُطاب ليلى . (٢) زيد وخالد يعشقان ليلى : (٣) إذا كان من قابلتُ زيدا أو خالدا فقد قابلت عاشقاً . (٤) لو كان واحداً من خطاب ليلى فلا بد أنه زيد أو خالد . (٥) ليلى ستتزوج زيداً أو خالداً . ومع أن هذه القضايا لا تتضمن سوى صورتين اثنتين هما زيد وخالد ، زيد أو خالد ، إلا أن هناك ، فى نظرى ، خمس صور مختلفة لما اجتمع من هاتين الكلمتين ، ونستطيع أن نبرز الفروق الدقيقة بين هذه الصور بما يأتى :

فى القضية الأولى: زيد « و » خالد هما اثنان، ولا يصدق ذلك على أيهما على انفراد ، ومع ذلك فليس كل ما اجتمع من زيد وخالد هو الاثنان ، لأن هذا هو واحد فقط . فالعدد اثنان هو جمع حقيقى من زيد مع خالد، وهو من نوع الاجتماع الذى يميز الفصول كما سيأتى فى الباب القادم . وأما فى القضية الثانية على العكس فإن ذلك الذى أثبتناه صحيح بالنسبة لزيد وبالنسبة لخالد على انفراد. فالقضية تساوى ولو أنها لا تطابق «زيد يعشق ليلى وخالد يعشق ليلى» وعلى ذلك فالربط بواو العطف ليس شأنه هنا شأنه فى القضية الأولى . فالقضية الأولى معنيةٌ بكليهما مجتمعين ، أما القضية الثانية فمعنية بكليهما منفردين أى كل أو كل واحد منهما . ونميز بين الحالتين بالكلام عن الأولى على أنه عطف عددى، لأن ما ينتج عنها هو عدد ، ونسمى الثانية اتصال قضايا لأن القضية التى تدخل فيها تساوى اتصالا بين قضايا . (ومما تجب ملاحظته أن اتصال القضايا الذى نحن بصدده هو من نوع مختلف تماماً عن كل أنواع الجمع

الذى تكلمنا عنه فهو فى الواقع من النوع المسمى حاصل الضرب المنطقى . فالقضايا تجمع على أنها قضايا لا على أنها حدود) .

والقضية الثالثة توضح نوع العطف الذى يُعرف بواسطته لفظة «أى» . وهناك بعض الصعوبة حول هذه الفكرة التى تبدو وكأنها فى منتصف الطريق بين العطف والانفصال . ويمكن توضيح ذلك كما يأتى : ليكن ا ، ب قضيتين مختلفتين ، كل منهما يلزم عنها قضية ثالثة حـ . وإذن فالانفصال « ا أو ب » يلزم عنه حـ . والآن ليكن ا ، ب قضيتين تسندان نفس المحمول لموضوعين مختلفين ، وإذن فهناك موضوعان يمكن أن يسند إليهما المحمول وبحيث تكون القضية الناجمة مساوية للانفصال « ا ، ب » . ولنفرض مثلاً أننا نستنتج من ذلك أنك « إذا قابلت زيدا أو قابلت خالدا فقد قابلت عاشقا هائما » قلنا : « إذا قابلت زيدا فقد قابلت عاشقاً هائماً » و « إذا قابلت خالداً فقد قابلت عاشقاً هائماً » وأننا نعتبر هذا مساوياً لقولك «إذا قابلت زيداً أوخالداً إلخ إلخ» فالربط بين زيد وخالد هنا هو ما يمكن أن يدل عليه أى واحد منهما . وهذا يختلف عن الانفصال بأنه يلزم عن ويلزم عنه العبارة التى تشملهما معاً ولكن هذا اللزوم المتبادل لا يقدم فى بعض الأمثلة المعقدة . فالجمع هنا فى الواقع مختلف عما يُدل عليه بلفظة «كلا» ، وهو مختلف عن صورتى الانفصال . وسأسميه العطف المتغير . والصورة الأولى للانفصال هى ما يظهر فى (٤) وهذه هى الصورة التى سأدل عليها بخاطب . فهنا التسليم بأن الأمر متعلق حتما بزيد أو بخالد إلا أنه ليس صحيحاً أن خالد هو الذى كان خاطبا أو أن زيداً هو الذى كان . فالقضية ليست مساوية لانفصال القضيتين « لا بد أنه كان زيد أولابد أنه كان خالداً » فالقضية فى الواقع لا يمكن التعبير عنها بانفصال أو باقتران قضيتين إلا عن طريق ملتو كالآتى :

« إذا لم يكن زيداً فقد كان خالداً ، وإذا لم يكن خالداً فقد كان زيداً » وهى صورة لا تطاق إذا زاد عدد الحدود على حدين ، وتصبح غير مقبولة من

الناحية النظرية إذا صار عدد الحدود لا نهائيا . ويكون هذا الانفصال إذن دالا على حد متغير ، أى أن أى هذين الحدين قصدنا فإن الانفصال لا يدل على هذا الحد ، ومع ذلك فهو يدل على واحد من هذين الحدين أو على الآخر . وهذا ما أسميه تبعاً لذلك بالانفصال المتغير . وأخيراً فالنوع الثانى من الانفصال هو الموضح فى (٥) وهوما أسميه الانفصال الثابت ، لأننا هنا نقصد زيداً أو نقصد خالداً ، ولكننا لا نقرر أى الاحتمالين هو الواقع . بمعنى أن القضية تساوى انفصال قضيتين : « ستتزوج ليلى زيداً أو ستتزوج خالداً » فهى ستتزوج واحداً بالذات من الاثنين. ويدل الانفصال على واحد بالذات من بينهما ، علماً بأنه يمكن أن يدل على أى واحد منهما . وبذلك تكون جميع الحالات الخمس مختلفة بعضها عن بعضها الآخر .

ومما تجدر ملاحظته أن هذه الحالات الخمس لا تنتج حدوداً ولا تصورات وإنما تنتج فقط مجموعات من الحدود . فالأولى تنتج حدوداً كثيرة ، أما الحالات الباقية فينتج عنها شيء خاص لاهو بالحد الواحد ولا بالحدود الكثيرة . فالارتباطات هى ارتباطات بين الحدود دون استخدام علاقة ما . وعلى الأقل فى الحالة التى يكون فيها الحدان المرتبطان فصلاً نجد أن كل رابطة يقابلها تصور محدد تماماً يدل على مختلف حدود المجموعة مرتبطة بالطريقة الخاصة . ولكى نوضح هذا دعنا نعيد التمييز السابق فى الحالة التى لا تكون فيها الحدود المرتبطة محصاة كما هو الحال فيما سبق ، وإنما تكون معرفة على أنها حدود فصل معلوم .

٦٠ ــ عندما نعلم فصل تصور ا يجب أن نسلم بأن الحدود المختلفة المنتمية لهذا الفصل معلومة أيضاً . أى إذا ذكر حد فإنه من الممكن أن نقرر عما إذا كان ذلك الحد ينتمى للفصل . وبهذه الطريقة تعلم مجموعة من الحدود دون أن نعدها واحداً واحداً . وفى الوقت الحاضر سوف لا أتعرض للسؤال الآتى : هل يمكن إعطاء مجموعة من الحدود بطريقة غير طريقة إحصائها أو طريقة فصل التصور . ولكن إمكان إعطاء مجموعة بواسطة فصل التصور هو فى غاية الأهمية ،

لأنها تمكننا من معالجة المجموعات اللانهائية كما سيأتى ذكره فى الجزء الرابع . أما فى الوقت الحاضر فسأفحص معنى هذه العبارات : جميع الألفات ، كل ألف ، أى ألف ، ألفٌ ، ألف مَّا . ولنبدأ بعبارة جميع الألفات فإنها تدل على عطف عددى ، يُعَيَّن متى أعطيت ا . والتصور جميع الألفات هو تصور محدود مفرد يدل على حدود الألفات مأخوذة جميعها معاً . ويمكن القول بأن للحدود عدداً يمكن اعتباره كإحدى خواص فصل تصور لأنه محدد لكل فصل تصور . وبالعكس كل ا ، مع أنها أيضاً تدل على جميع الألفات إلا أنها تدل عليها بطريقة مختلفة ، أى منفردة لا مجتمعة . وأى ا تدل فقط على واحد من الألفات ، وليس مما يهمنا بالمرة أى واحد منها تدل العبارة ، وإنما ذلك الذى يقال يكون صحيحاً مهما كانت الألف .

وفضلاً عن ذلك فإن أى ا تدل على ا متغيرة ، بمعنى أننا إذا وقفنا عند ا معينة فمن المؤكد أن أى ا لا تدل على هذه . ومع ذلك فكل قضية تصدق على أى ا تصدق على هذه الألف . أما « ألفٌ » فهى انفصال متغير بمعنى أن القضية التى تصدق على « ألفٌ » قد لا تصدق على كل ألف خاصة ولا يمكن ردها إذن إلى انفصال قضايا . فمثلاً تقع نقطةٌ بين أى نقطة أخرى ولكن لا يمكن القول عن أية نقطة خاصة بالذات أنها تقع بين أى نقطة وأى نقطة أخرى ، لأنه سوف توجد أزواج كثيرة من النقط لا تقع نقطتنا بينهما . وهذا يصل بنا أخيراً إلى ألف مَّا ، أى الانفصال الثابت . فهذا يدل على حد واحد فقط من حدود الفصل ا ، ولكن الحد الذى تدل عليه قد يكون أى حد من حدود الفصل . فمثلاً « لحظة مَّا لا تتبع أى لحظة » معناها أنه كانت هناك لحظة أولى فى الزمن بينما « هناك لحظة تسبق أى لحظة » تعنى العكس تماماً أى كل لحظة لها سوابق .

٦١ — وفى حالة الفصل ا ذى العدد المتناهى الحدود مثلاً $ا_١$ ، $ا_٢$ ، $ا_٣$ .... $ا_ن$ يمكننا توضيح الأفكار السالفة بالطريقة الآتية:

(١) «جميع» الألفات تدل على $ا_١$ و $ا_٢$ و . . . ان .

(٢) «كل» ا تدل على $ا_١$ وتدل على $ا_٢$ و . . وتدل على ان .

(٣) «أى» ا تدل على $ا_١$ أو $ا_٢$ أو . . . أو ان حيث «أو» معناها أنه لا يهم أيهما نأخذ .

(٤) «ألفٌ» تدل على $ا_١$ أو $ا_٢$ أو ... أو ان حيث «أو» معناها أنه لا ينبغى أن نأخذ واحدة خاصة بالذات، كالحال تماما فى «جميع» الألفات حيث لا ينبغى أن نأخذ واحدا منها بالذات .

(٥) «ألف مَّا» : تدل على $ا_١$ أو تدل على $ا_٢$ أو . . . أو تدل على ان حيث أنه ليس من غير المهم أيها نأخذ بل بالعكس فإن ألفا خاصة بالذات يجب أن تؤخذ .

ولما كانت طبيعة الطرق المختلفة لاجتماع الحدود وخصائص تلك الطرق ذات أهمية حيوية لمبادئ الرياضة فقد نحسن صنعاً بتوضيح تلك الخصائص بالأمثلة الهامة الآتية :

أولا — إذا كانت ا فصلاً، ب فصل فصول، فإننا نحصل على ست حالات بين ا ، ب باجتماعها، باستخدام «أى» ، «أداة التنكير»، «ما» . أما «جميع» و«كل» فهما لا يُدخلان شيئاً جديداً . والحالات الست هى :

(١) أى ا تنتمى لأى فصل داخل فى ب ، وفى عبارة أخرى الفصل ا بأكمله داخل فى الجزء المشترك ، أو فى حاصل الضرب المنطقى لمختلف الفصول الداخلة فى ب .

(٢) أى ا منتمية لواحدة من الباءات . بمعنى أن الفصل ا داخل فى أى فصل يشتمل على جميع الباءات ، أو داخل فى حاصل الجمع المنطقى لجميع الباءات .

(٣) أىّ ا ينتمى لباء مَّا ، أى يوجد فصل داخل فى ب فيه يدخل الفصل ا . والفرق بين هذه الحالة وبين الحالة الثانية هو أنه فى هذه الحالة توجد باء واحدة

ينتمى لها كل ا بينما فى الحالة الثانية أثبتنا فقط أن كل ا تنتمى لباء ، والألفات المختلفة قد تدخل فى باءات مختلفة .

(٤) ألفٌ تنتمى لأى ب ، بمعنى أننا مهما أخذنا ب فإن لها جزءاً مشتركاً مع ا .

(٥) ألفٌ تنتمى لباء ، أى توجد باءٌ لها جزء مشترك مع ا ، وهذا يساوى « ا مَّا تابعة لباء مَّا » .

(٦) ألف مَّا تدخل فى أى ب ، أى توجد ألفٌ تنتمى للجزء المشترك بين جميع الباءات ، أو ا وجميع الباءات لها جزء مشترك .

وهذه هى جميع الحالات التى تنشأ هنا .

ثانياً – ولكى نبين كيف أن العلاقات التى ذكرنا هى من النوع العام فلنقارن الحالة السابقة بما يأتى : إذا كان ا ، ب سلسلتين من الأعداد الحقيقية : فإن حالات ست تنشأ شبيهة بالحالات السابقة .

(١) أىّ ا أصغر من أىّ ب ، أو السلسلة ا داخلة فى الأعداد التى هى أقل من كل ب .

(٢) أى ا أصغر من باء ، أو مهما كانت ا فإنه توجد ب أكبر منها ، أو السلسلة ا داخلة بين الأعداد التى هى أصغر من حد (متغير) من حدود السلسلة ب . وليس معنى هذا أن حدّاً مَّا من حدود السلسلة ب أكبر من جميع الألفات .

(٣) أى ا أصغر من باء مَّا ، أو يوجد حد ب أكبر من جميع الألفات . ولا ينبغى الخلط بين هذه الحالة والحالة السابقة (٢) .

(٤) ألفٌ أصغر من أى ب : أى مهما كانت قيمة ب فإنه توجد ا أصغر منها .

(٥) ألفٌ أصغر من باء : أى من الممكن إيجاد ألف وباء بحيث تكون ا أقل من ب . وهذا إنما هو مجرد إنكار لكون أى ا أكبر من أى ب .

(٦) ألفٌ ما أقل من أى ب، أي توجد ا أصغر من جميع الباءات وهذا لا يلزم عن (٤) حيث كانت الألف متغيرة بينما هى ثابتة هنا .

وفى هذه الحالة اضطرتنا الرياضة إلى التمييز بين الانفصال المتغير والانفصال الثابت .

أما فى الحالات الأخرى التى لم تطغى عليها الرياضة ، فإن هذا التمييز قد أهمل، ولم تبحث الرياضة فى الطبيعة المنطقية للمعانى الانفصالية المستخدمة فى تلك الحالات .

ثالثاً — وهاك مثالاً آخر يوضح الفرق بين أى وكل ، وهو الفرق الذى لم يكن له محل فى الحالات السابقة . إذا كان ا ، ب فصلى فصول ، فإن هناك عشرين علاقة مختلفة تنشأ عنهما نتيجة لمجموعات الحدود المختلفة المأخوذة من حدودهما. ومن المفيد استخدام الاصطلاحات الفنية الآتية : إذا كان ا فصل فصول ، فإن مجموعه المنطقى يتكون من جميع الحدود الداخلة فى أى ا ، أى من جميع الحدود التى هى بحيث يوجد ا تكون تابعة له، بينما يتكوّن حاصل الضرب المنطقى من جميع الحدود الداخلة فى كل ا أى من الجزء المشترك بين جميع الألفات . فتنشأ لدينا الحالات الآتية :

(١) أى حد من أى ا داخل فى كل ب ، أى أن حاصل الجمع المنطقى للألفات داخل فى حاصل الضرب المنطقى للباءات .

(٢) أى حد من أي ا داخل فى باء ، أى حاصل الجمع المنطقى للألفات داخل فى حاصل الجمع المنطقى للباءات .

(٣) أى حد من أى ا داخل فى باء مَّا ، أى توجد باء يكون حاصل الجمع المنطقى للألفات داخلا فيها .

(٤) أى حد من ا ما داخل فى كل ب ، أى توجد ا داخلة فى حاصل ضرب ب .

(٥) أى حد من ا مَّا داخل فى باء ، أى توجد ا داخل فى مجموع ب .

(٦) أى حد من ا ما داخل فى باء مَّا، يعنى توجد ب تشتمل على فصل تابع لألف .

(٧) حدٌ من أى ا داخل فى أى ب يعنى « أى فصل من ا وأى فصل من ب لهما جزء مشترك .

(٨) حدٌ من أى ا داخل فى باء ، يعنى أى فصل من ا له جزء مشترك مع حاصل الجمع المنطقى للباءات .

(٩) حدٌ من أى ا داخل فى باء ما ، يعنى يوجد ب يكون لكل ا معها جزء مشترك » .

(١٠) حدٌ من ألف يدخل فى كل ب ، يعنى حاصل الجمع المنطقى للألفات وحاصل الضرب المنطقى للباءات لهما جزء مشترك .

(١١) حدٌ من ألف يدخل فى أى ب ، يعنى إذا علمت أيِ ب فإنه يمكن إيجاد ا يكون لها مع ب جزء مشترك .

(١٢) حدٌ من ألف يدخل فى باء ، يعنى حاصلا الجمع المنطقين للألفات والباءات لهما جزء مشترك .

(١٣) أى حدٌ من كل ا يدخل فى كل ب ، يعنى حاصل الضرب المنطقى للألفات يدخل فى حاصل الضرب المنطقى للباءات .

(١٤) أى حدٌ من كل ا يدخل فى باء ، يعنى حاصل الضرب المنطقى للألفات يدخل فى حاصل الجمع المنطقى للباءات .

(١٥) أى حدٌ من كل ا يدخل فى باء مَّا ، يعنى يوجد حد من حدود ب يكون حاصل الضرب المنطقى للألفات داخلاً فيه .

(١٦) حدٌ (أوحد مَّا) من كل ا يدخل فى كل ب يعنى حاصلا الضرب المنطقين للألفات والباءات لهما جزء مشترك .

(١٧) حد (أوحدٌ مَّا) من كل ا يدخل فى باء يعنى حاصل الضرب المنطقى للألفات وحاصل الجمع المنطقى للباءات لهما جزء مشترك .

(١٨) حدٌّ مَّا من أى ا يدخل فى كل باء ، يعنى أى ا لها جزء مشترك مع حاصل الضرب المنطقى للباءات .

(١٩) حدٌّ من ألف مَّا يدخل فى أى ب، يعنى يوجد حد مَّا من حدود ا يكون لكل ب معه جزء مشترك .

(٢٠) حدٌّ من كل ا يدخل فى أى ب ، يعنى أى ب لها جزء مشترك مع حاصل الضرب المنطقى للألفات .

وتبين هذه الأمثلة أنه بينما يوجد فى الغالب لزوم متبادل بين القضايا المتناظرة المستخدم فيها أداة التنكير أو كلمة مَّا أو المستخدمة فيها كلمتا «أى» و« كل» إلا أن هناك حالات أخرى لايوجد فيها هذا اللزوم المباشر . وبذلك تكون المعانى الخمسة التى بحثناها فى هذا الباب هى معان مختلفة بعضها عن بعض ، وأن الخلط بينها مما يؤدى إلى أخطاء محققة .

٦٢ — يتضح مما سبق أنه سواءٌ أكانت هناك طرق مختلفة للدلالة أم لم تكن، فإن الأشياء المدلول عليها بالعبارات جميع الناس ، كل إنسان إلخ . . هى حقا متميزة عن بعضها . ونكون حينئذ محقين إذا قلنا إن الفرق كله واقع فى الأشياء ، وأن الدلالة هى ذاتها فى جميع الحالات . ومع ذلك فهناك مشكلات كثيرة صعبة متصلة بهذا الموضوع ،وبوجه خاص لطبيعة الأشياء المدلول عليها . ف «جميع» الناس وهى التى سنطابق بينها وبين فصل الناس، تبدو لا إبهام فيها ، مع أنها تقع فى صيغة الجمع من الناحية اللغوية . ولكن المسألة ليست فى مثل هذه البساطة بالنسبة للحالات الأخرى: فقد يتسرب إلينا الشك فى أن الشىء المبهم قد دُلَّ عليه بدون إبهام، أو أن الشىء المحدد قد دل عليه بإبهام . خذ القضية « قابلت إنسانا » فمن المحقق ، ومما يلزم عن القضية ، أن الذى قابلت هو إنسان معين لا إبهام فيه . ويمكن التعبير عن هذه القضية بالاصطلاح الفنى المستخدم هنا بقولنا « قابلت إنسانا مَّا » ولكن الإنسان الواقعى الذى قابلته لا يكوّن جزءاً من القضية المذكورة، ولا يدل عليه بوجه خاص بالعبارة « إنسان مَّا»، وعلى

ذلك فالحادثة المادية التى وقعت ليس محكوماً بها فى القضية . أما المحكوم به فى القضية فهو مجرد أن واحدةً ما من فصل الأحداث المادية قد وقعت بالذات . فالجنس البشرى كله داخل فى هذا الحكم فلو أن أى إنسان قد عاش فى الماضى ، أو سيولد ، لم يوجد أو سوف يوجد لتغير معنى القضية . ويمكن وضع هذا فى لغة أدنى إلى المفهوم بقولنا : إذا عوضت الإنسان بأى من فصل التصورات التى تنطبق على الفرد الذى كان لى شرف لقائه ، فإن القضية تتغير ، ولو أن الفرد المذكور يكون مدلولا عليه كسابقه بالضبط . والذى يثبته هذا هو أنه لا ينبغى اعتبار «إنسان ما» دالاً فعلاً على زيد أو دالاً فعلاً على خالد، وهكذا. فالمخلوقات البشرية على ممر العصور ذات صلة بكل قضية تدخل فيها عبارة إنسان ما، والذى يدل عليه ليس كل إنسان على انفراد ، ولكن نوعاً مما اجتمع من جميع الناس. وهذا أوضح فى حالة «كل» و«أى» وأداة التنكير . وإذن فهناك شىء مامعين ومختلف فى كل من الحالات الخمس ويجب أن يكون شيئاً بوجه من الوجوه ولكنه يتميز بأنه مجموعة من الحدود مجتمعة بشكل خاص ، وهذا الشىءً هو ما يُدل عليه بجميع الناس ، كل إنسان ، أى إنسان ، إنسان ، إنسان ما . وعناية القضايا بهذا الشىء الشديد التناقض حيث يستعمل التصور المقابل للدلالة عليه .

٦٣ — بقى علينا أن نبحث فى فكرة أداة التعريف « ال » . وقد أبرز «بيانو» الوجهة الرمزية لأداة التعريف وحصل على نتائج ذات فائدة كبرى فى حسابه التحليلى . ولكننا سنبحث فيها هنا من الناحية الفلسفية . فاستخدام التطابق ونظرية التعريف يتوقفان على فكرة أداة التعريف ، وهى بذلك لها أكبر الأهمية من الناحية الفلسفية .

وأداة التعريف « أل » فى حالة المفرد لا تستخدم إلا بالنسبة لفصل تصور ليس له إلا فرد واحد . فنحن نتكلم عن الملك ، الرئيس للوزارة ، وهكذا (على أن يكون مفهوماً أن ذلك يدل على معنى فى الوقت الحاضر) وفى مثل هذه الأحوال توجد طريقة للدلالة على حد معين مفرد بواسطة تصور ، وهذه الطريقة لا تعطينا

إياها أى واحدة من ألفاظنا الخمسة . وبفضل هذه الفكرة تستطيع الرياضة أن تعرّف الحدود التى ليست بتصورات . وهذا مثل على الفرق بين التعريف الرياضى والتعريف الفلسفى . وكل حد هو الفرد الوحيد لفصل تصور ما ، وعلى ذلك ، فمن الناحية النظرية ، يكون كل حد قابلا للتعريف ما لم نكن قد استخدمنا نظاماً يكون فيه هذا الحد واحداً من المسلمات (مما لا يمكن تعريفه) . وإنه لمن المتناقضات العجيبة، التى تحير عقول أصحاب الرمزية ، أن التعاريف من الناحية النظرية إن هى إلا تقريرات لاختصارات رمزية غريبة عن العقل ، وموضوعة لمجرد الفائدة العملية . ومع ذلك فهذه التعاريف ، عند بناء الموضوع ، تحتاج إلى درجة كبيرة من الفكر وينطوى تحتها أحياناً بعض النتائج الهامة للتحليل . ويبدو أن هذه الحقيقة تجد لها تفسيراً فى نظرية الدلالة . فالشئ قد يكون حاضراً فى العقل دون أن نعرف أى تصور يكون هذا الشىء الحالة الخاصة للفردية منه . واكتشاف مثل هذا التصور ليس مجرد تحسين فى الاصطلاحات . والسبب فى هذا أنه بمجرد أن نجد التعريف يصبح من غير الضرورى للتفكير أن نتذكر الشىء المعرّف، ما دامت التصورات وحدها هى التى تدخل فى استنتاجاتنا . وفى لحظة الاكتشاف يظهر التعريف صحيحاً ، لأن الشىء الذى نريد تعريفه كان ماثلاً فى تفكيرنا . ولكن عند الاستنباط لا يكون صحيحاً ، وإنما يكون مجرد رمز لأن ما يحتاجه الاستنباط ليس الكلام عن هذا الشىء ولكن الكلام عن الشىء الذى يدل عليه التعريف .

وفى أغلب التعاريف التى ترد فعلاً فى الرياضة : المعرّف هو فصل من الكائنات ، وبذلك لا تظهر صراحة فكرة أداة التعريف « ال » . ولكن حتى فى هذه الحالة أيضاً نجد أننا فى الحقيقة نعرف الفصل الذى يحقق شروطاً معينة . وسنرى فى الباب التالى أن الفصل هو دائماً حد أو اتصال حدود ، ولا يمكن أن يكون تصوراً بالمرة . وعلى ذلك ففكرة أداة التعريف « ال » لازمة للتعاريف . ونلاحظ بصفة عامة أن كفاية التصورات للتعبير عن الأشياء تتوقف كلية

على الطريقة التى لا إبهام فيها التى يدل بها على حد واحد والتى تتم بواسطة أداة التعريف .

٦٤ – إن صلة الدلالة بطبيعة التطابق هامة وتساعد فى نظرى على حل بعض المسائل الصعبة . وليس من اليسير الإجابة على السؤال : هل التطابق علاقة أم لا ؟ وهل هناك تصور مثل هذا بالمرة ؟ فقد يقال إن التطابق لا يمكن أن يكون علاقة ، لأنه عندما يكون محكوماً به حقاً يكون عندنا حد واحد ، على حين يلزم لكل علاقة حدان . وقد يقول المعترض : فى الواقع لا يمكن أن يكون التطابق شيئاً بالمرة ، فواضح أن الحدين لا يمكن أن يكونا متطابقين ، ولا يمكن لحد أن يكون متطابقا ، وإلا فمع أى شىء هو متطابق ؟

ومع ذلك فالتطابق يجب أن يكون شيئاً ما . وقد نحاول أن ننقل التطابق من الحدود إلى العلاقات ، ونقول : إن حدين يكونان متطابقين من بعض الوجوه عندما تكون لهما علاقة معلومة بحد معلوم . ولكن علينا فى هذه الحالة أن نسلم إما أن هناك تطابقاً دقيقا بين حالتى العلاقة المعلومة ، أو أن الحالتين بينهما تطابق بمعنى أن لهما علاقة معلومة لحد معلوم . ولكن وجهة النظر الأخيرة تؤدى بنا إلى عملية لا تنتهى من النوع غير المقبول . وهكذا يجب أن نسلم بالتطابق . أما الصعوبة الخاصة بوجوب وجود حدين للعلاقة فيمكن ملافاتها بالإنكار التام لوجوب حدين حقا ، وينبغى أن يكون هناك دائما متعلق به ومتعلق ، ولكن ليس حتما أن يكونا مختلفين . وهما ليسا كذلك فى الحالات التى تثبت فيها المطابقة [١] .

وينشأ السؤال الآتى : لمَ كان من المفيد أن نثبت التطابق ؟ وهذا السؤال جوابه فى نظرية الدلالة . فإذا قلنا « إدوارد السابع هو الملك » فقد أثبتنا تطابقاً . والسبب فى أن هذا الحكم يستأهل الإثبات هو أنه فى إحدى الحالتين يدخل فعلاً الحد ، بينما فى الحالة الأخرى يحل تصور محله . (وسأتجاهل هنا أن الإدواردات تكوّن فصلا ، وأن الإدواردات السابقة تكون فصلا ذا حد

(١) انظر الباب التاسع بند ٩٥ ، فى الكلام على علاقة الحدود بذاتها .

واحد . أما إدوارد السابع فهو عمليا، ولأنه ليس شكليا ، اسم علم) . ويحدث غالباً أن يحصل تصوران دالان ولا نجد ذكراً للحد ذاته كما فى القضية « البابا الحالى هو آخر الأحياء من جيله » . وعندما يعلم الحد ، فإن الحكم بتطابقه مع نفسه ولو أنه صحيح عديم الفائدة، ولا نجده خارج كتب المنطق . ولكن عندما تدخل التصورات الدالة يصبح التطابق فى الحال ذا مغزى . وفى هذه الحالة تدخل علاقة بين التصور الدال والحد ، أوعلاقة بين كل من التصورين الدالين ، وإن لم تكن هذه العلاقة مثبتة . ولكن « هو» (is فى الإنجليزية) » التى ترد فى مثل هذه القضايا لا تقرر بذاتها هذه العلاقة الزائدة ، بل تقرر التطابق البحت[1].

٦٥ — والخلاصة : فصل التصور المسبوق بواحد من الألفاظ الستة : «جميع» ، «كل» ، «أى» ، «أداة التنكير» ، «ما» ، أداة التعريف «ال» ، إذا دخل فى قضية فإن القضية بصفة عامة لا تكون حول التصور الذى يتكون من اللفظتين معاً ، ولكنها تكون حول شىء مختلف تماما عن هذا ، وهذا الشىء ليس فى العادة تصورا بالمرة ، ولكنه حد أو مركب من حدود . ويتضح هذا من أن القضايا التى تدخل فيها هذه التصورات هى قضايا كاذبة على العموم بالنسبة للتصورات ذاتها . وفى نفس الوقت فى الإمكان الكلام عن قضايا التصورات ذاتها بل وصياغة مثل هذه القضايا ، ولكنها لا تكون القضايا الطبيعية التى تنشأ باستخدام هذه التصورات فالقضية « أى عدد إما فردى أو زوجى » هى قضية

(١) لفظة « is » غامضة جداً ، ولا بد من العناية الشديدة عند النظر فى أمرها حتى لا تلتبس معانيها ، فهناك (١) المعنى الذى تثبت فيه الوجود ، كما فى قولنا « "A is" » . (٢) معنى التطابق (٣) معنى الحمل فى قولنا "A is human" (٤) المعنى الموجود فى قولنا « "A is a-man" (انظر هامش صفحة ١٠٤) وهو المعنى الشبيه جداً بالتطابق. وإلى جانب هذه المعانى هناك .ستعمالات أقل شيوعاً مثل "To be good is to be happy" حيث يكون المقصود علاقة من الأحكام ، وهذه العلاقة فى الواقع تؤدى حيث توجد إلى اللزوم الصورى. ولا ريب أن هناك معان أخرى لم تحصل عندى . انظر فى معانى « is »

De Morgan, Formal Logic, pp. 49-50.

طبيعية جدا ، على حين أن القضية « أى عدد هو اتصال متغير » فإنما هى قضية لا يجدها المرء إلا فى البحوث المنطقية . وفى هذه الحالات نقول إن التصور المذكور يدل . وقد اتفقنا على أن الدلالة علاقة محددة تماما ، وهى ذاتها فى جميع الحالات الست ، وأنها هى طبيعة الشىء المدلول عليه والتصور الدال ، وهى التى تميز الحالات المختلفة بعضها عن بعض . ولقد بحثنا مع بعض التفصيل فى طبيعة الأشياء المدلول عليها وفى الفروق بينها فى الحالات الخمس التى تكون فيها هذه الأشياء عبارة عن تجمعات من الحدود . والدراسة الكاملة تقتضى البحث كذلك فى التصورات الدالة . ولم نبحث فيما سبق الفرق بين المعنى الفعلى لهذه التصورات وبين طبيعة الأشياء التى تدل عليها . ولكنى لا أعرف أنه هناك ما يمكن أن يقال عن هذا أكثر من ذلك . وأخيراً بحثنا فى أداة التعريف أل ، وبينا أن هذه الفكرة أساسية لما تسميه الرياضة بالتعريف ، كما أنها أساسية كذلك لإمكان تحديد الحد تحديداً يقوم فقط على التصورات . وقد وجدنا أن الاستخدام الفعلى للتطابق ، وإن لم يكن معناه ، يتوقف على هذه الطريقة فى الدلالة على الحد الواحد . ومن هنا نسير إلى البحث فى الفصول ، وبذلك نتناول الموضوعات المتصلة بالصفات .

الباب السادس

الفصول

٦٦ — من أصعب المشكلات فى الفلسفة الرياضية وأعظمها أهمية أن نتمثل فى الذهن تمثلاً واضحاً المقصود بـ « الفصل » ، وأن نميز هذا المعنى عن سائر المعانى التى ترتبط به . وذلك أنه فضلا عن أن « الفصل » تصورٌ أساسى جدا ، فموضوعه يحتاج فى علاجه إلى غاية العناية والدقة ، بالنظر إلى مسألة التناقض التى سنناقشها فى الباب العاشر من هذا الكتاب . ولا بد لى من أجل ذلك أن أطلب من القارئ ألا ينظر إلى مجموع التمييزات الدقيقة بعض الشىء والواردة فيما بعد على أنها حذلقة فارغة .

وقد جرت العادة فى كتب المنطق على التمييز بين وجهتين من النظر هما الماصدق والمفهوم . أما الفلاسفة فقد تعودوا اعتبار المفهوم أكثر أساسيا ، على حين جرى العرف بأن الرياضة تبحث بوجه خاص فى الماصدق . ويقرر « كوتيراه » M. Couturat بوجه عام فى كتابه البديع عن « ليبنتز » أن المنطق الرمزى لا يمكن أن يبنى إلا على أساس الماصدق[1] . وقد كان يمكن أن نجد لرأيه ما يسوغه لو لم تكن ثمة فى الواقع إلا هاتان الوجهتان من النظر ؛ غير أن الحق هو أن هناك مواضع متوسطة بين المفهوم البحت والماصدق الخالص ، وفى هذه المناطق المتوسطة يقوم المنطق الرمزى . هذا إلى أن الفصول التى هى موضوع بحثنا لابد أن تتركب من حدود ، لا أن تكون محمولات أو تصورات ، إذ يجب أن يكون الفصل معينا حين تعطى حدوده ، ولكننا على وجه العموم سنجد كثيرا من المحمولات تصلح أن تتعلق بالحدود المعطاة دون غيرها . ولا نستطيع

---

(١) La Logique de Leibniz, Paris. 1901, p.337,

بطبيعة الحال محاولة تعريف الفصل بالمفهوم على أنه فصل من المحمولات التى تتعلق بالحدود المعطاة دون غيرها ، حتى لا يقع تعريفنا فى دور . ولذلك لا يمكننا إلى حد ما مفاداة وجهة نظر الماصدق . ومن جهة أخرى إذا أخذنا بالماصدق الخالص فقد عرفنا الفصل بتعداد حدوده ، وفى هذه الحالة لن تسمح لنا هذه الطريقة بالبحث فى الفصول غير المتناهية كما يفعل المنطق الرمزى . لذلك يجب بوجه عام أن ننظر إلى الفصول التى تبحث فيها كأنها أشياء تدل عليها ، ومن هذا الوجه كان النظر إلى المفهوم ضروريا . وإلى هذا الاعتبار ترجع الأهمية العظمى لنظرية الدلالة . وسنأخذ أنفسنا فى هذا الباب من الكتاب بأن نبين بالدقة القدر الذى يتدخل فيه الماصدق والمفهوم على الترتيب فى التعريف وفى استخدام الفصول . كما أنه لا بد لنا خلال مناقشة الموضوع التوجه إلى القارئ أن يجعل فى باله أن كل ما نقوله ينطبق على الفصول المتناهية وغير المتناهية على حد سواء .

٦٧ — إذا كان شىء ما مدلولا عليه فى غير إبهام بتصور ، فسأتكلم عن التصور كتصور (أو فى بعض الأحيان متجوزا على أنه « أل » تصور للشئ الذى نتكلم عنه . ومن أجل ذلك كان لا بد من التمييز بين تصور الفصل وبين فصل التصور . وقد جرى العرف على تسمية « الإنسان » فصلا تصوريا ، غير أن الإنسان لا يدل فى استعماله العادى على أى شىء . ومن جهة أخرى فإن « الناس » و « جميع الناس » (وهو ما سأعتبره مرادفاً) يدل بالفعل ، وسأفترض أن ما يدلان عليه هو الفصل المؤلف من جميع الناس . على هذا يكون « الإنسان » هو فصل التصور ، و « الناس » (التصور) هو تصور الفصل ، والناس (الشىء الذى يدل عليه التصور « الناس ») هم الفصل . ولا ريب أنه مما يدعو إلى الاضطراب فى أول الأمر استعمال فصل التصور فى معانى مختلفة ، وحيث كنا فى حاجة إلى كثير من التمييزات فيبدو أننا لن نتمكن من تجنب تحميل اللغة أكثر مما تطيق عادة . وبعبارات الباب السابق يمكن القول بأن

الفصل هو الصلة العددية بين الحدود ، وهذه هى الدعوى التى نريد إثباتها .

٦٨ — لقد نظرنا فى الباب الثانى إلى الفصول على أنها مشتقة من أحكام ، أى على أن جميع الأشياء تحقق تقريراً ما مبهم الصورة تماماً . وسأناقش هذه المسألة مناقشة نقدية فى الباب الآتى ، أما فى هذا الباب فستقنع بالبحث فى الفصول من جهة أنها مشتقة من محمولات ، دون أن نقطع برأى أكل حكم مكافىء لحمل ، أم لا . ونستطيع بعد ذلك أن نتخيل ضرباً من توالد الفصول يجرى فى المراحل المتوالية التى تشير إليها هذه القضايا النموذجية « سقراط إنسانى » و « سقراط له إنسانية » و « سقراط إنسان » و « سقراط واحد من الناس » . ويمكن أن نقول إن القضية الأخيرة دون سائر القضايا هى وحدها التى تشتمل صراحة على الفصل باعتبار أنه مكوِّن . ولكن كل قضية مركبة من موضوع ومحمول ينشأ عنها القضايا الثلاث المكافئة ، وبذلك ينشأ من كل محمول (بشرط أنه يمكن فى بعض الأحيان حمله) فصلٌ . وهذا هو توالد الفصول من وجهة نظر المفهوم .

ومن ناحية أخرى فإن الرياضيين حين يبحثون فيما يسمونه المجموع ، أو المجموعة ، أو أى لفظ آخر من هذا القبيل ، فمن المألوف وبخاصة حين يكون عدد الحدود الداخلة متناهيا أن ينظروا إلى الموضوع الذى يبحثونه (الذى هو فى الواقع فصل) على أنه معرفٌ بتعداد حدوده ، وربما يكون متكونا من حد واحد هو فى هذه الحالة الفصل . فالأمر هنا ليس أمر محمولات ودلالات ، بل أمر حدود ترتبط بواو العطف على المعنى الذى تدل عليه لفظة الواو بالعطف العددى . وعلى ذلك يكون زيد وعمرو فصلا ، ويكون زيد وحده فصلا . وهذا هو الأصل فى توالد الفصول من جهة الماصدق .

٦٩ — أفضل دراسة صورية للفصول موجودة بين أيدينا[1] هى تلك التى قام

---

(١) مع إغفال فريج Frege الذى سأناقشه فى الملحق .

بها « بيانو » ، غير أنه أغفل فى دراسته عدداً من التمييزات فى غاية الأهمية الفلسفية . ويُوحد « بيانو » بين الفصل وبين فصل التصور ، ولا أعتقد أنه فعل ذلك عن وعى تام : فعنده أن علاقة الفرد بفصله ، هى التى يعبر عنها بـ « هو» is a[1] ، وهو يرى أن القضية « ٢ هو عددٌ » قضية الحد فيها داخل تحت الفصل « عدد » . ومع ذلك فإنه يوحد بين تساوى الفصول أى اشتمالها على نفس الحدود ، وبين التطابق ، وهذا إجراء غير مشروع عندما ننظر إلى الفصل على أنه فصل التصور . فلكى ندرك أن الإنسان والماشى على قدمين عارى الريش ليسا شيئاً واحداً ، فليس من الضرورى أن نأخذ دجاجة ونتزع عن هذا الطائر المسكين ريشه . أو فلنأخذ مثالا أقل تعقيداً ، فمن الواضح أن العدد الأولى الزوجى ليس مطابقا للعدد الصحيح بعد الواحد . وهكذا إذا وحدنا بين الفصل وبين فصل التصور ، فينبغى أن نسلم بأن فصلين قد يكونان متساويين دون أن يكونا متطابقين . ومع ذلك فمن الواضح أنه حين يوجد فصلان متساويان فثمة شىء من التطابق بينهما ، لأننا نقول إنهما «نفس» الحدود . وعلى ذلك هناك شىء مّا لا شك فى اشتراكه عند تساوى فصلين تصوريين ، ويبدو أن هذا الشىء هو الأجدر أن يسمى الفصل . دع مثال الدجاجة المنتوفة الريش جانباً ، تجد أن أى شخص يقول عن فصل الماشى على قدمين عارى الريش أنه «بعينه» فصل الناس ، وأن فصل الأعداد الأولية الزوجية هو بعينه فصل الأعداد الصحيحة بعد الواحد . وعلى ذلك فلا ينبغى أن نطابق بين الفصل وبين فصل التصور ، أو نعتبر أن «سقراط إنسان» قضية مُعَبِّرَةٌ عن علاقة فرد بالفصل الذى هو جزئى له . ويترتب على ذلك نتيجتان (سنثبتهما بعد قليل) يمنعان من الاقتناع الفلسفى ببعض النقط فى مذهب « بيانو » الصورى . وأولى النتيجتين

---

(١) فى اللغة الأجنبية الرابطة Copula هى فعل الكينونة to be فى الانجليزية و être فى الفرنسية ، وليس فى العربية رابطة ، وقد وضع المناطقة لفظة « هو » بدلها ، وبذلك تكون القضية المصرح فيها بهو ثلاثية . [المترجم] .

أنه لايوجد مايسمى بالفصل الصفرى ، ولو أنه توجد فصول تصورية صفر . والنتيجة الثانية أن الفصل إذا كان ذا حد واحد فينبغى أن يطابق بينه ، على عكس ما جرى عليه عرف « بيانو » ، وبين ذلك الحد الواحد . ومع ذلك فلن أقترح تغيير استعمال « بيانو » أو رموزه بناءً على أى نقطة مما أثرته ، على العكس إنى أراها أدلة ينبغى على المنطق الرمزى ، فيما يختص بالرموز ، أن تكون عنايته بالفصول التصورية أولى من عنايته بالفصول .

٧٠ — لقد رأينا أن الفصل ليس محمولا ، ولا فصلا تصوريا ، لأن محمولات مختلفة وفصولا تصورية مختلفة قد تتفق مع فصل بعينه . وكذلك الفصل ، على الأقل فى أحد معانيه ، متميز عن الكل المؤلف من حدوده ، لأن كل الحدود إنما هو شىء فى جوهره واحد ، على حين أن الفصل عندما يكون له حدود كثيرة هو ، كما سنرى فيما بعد ، هذا الضرب عينه الذى نخبر فيه عن الكثير . وغالبا ما نجد اللغة تجرى على التمييز بين الفصل ككثير ، وبين الفصل ككل ، مثل : المكان والنقط ، الزمان واللحظات ، الجيش والجند ، البحرية والبحارة ، مجلس الوزراء والوزراء ، وهذه كلها أمثلة توضح ذلك التمييز . إن المقصود من الكل ، على معنى المجموعة البحتة التى نتكلم عنها فى هذا الصدد ، ليس دائما كما سنجد فيما بعد قابلا للتطبيق حيث يكون المفهوم من الفصل ككثير منطبقا (انظر الباب العاشر) . وفى هذه الحالات لا يجب أن يُستعمل الفصل على أنه هو نفسه موضوع منطقى واحد[1] ، ولو أن الحدود يمكن القول إنها تندرج تحت الفصل . ولكن هذه الحالة لا تنشأ أبداً عندما يمكن أن يتولد الفصل من المحمول . وهكذا نستطيع فى الوقت الحاضر أن نبعد هذه المشكلة المعقدة من أذهاننا . وللحدود المكونة للفصل ككثير ولو أن لها ضرباً من الوحدة ، إلا أنها أقل مما يحتاج إليه الفصل ككل . الواقع أن فى هذه

---

(١) ليست الكثرة من الحدود موضوعاً منطقياً حين يحكم عليها بعدد ، ومثل هذه القضايا ليس لها موضوع واحد بل موضوعات كثيرة . انظر آخر بند ٧٤ .

الحدود من الوحدة ما يكفى أن يجعلها كثرة ، ولكن ليس فى هذه الوحدة ما يكفى أن يمنع الكثرة من البقاء كثرة . وثمة سبب آخر للتمييز بين الكل وبين الفصول ككثرة ، هو أن الفصل كواحد قد يكون واحداً من حدود الفصل ككثرة ، كما هى الحال فى « الفصول واحدة بين فصول » (وهذا يكافئ من ناحية الماصدق « الفصل هو فصل تصور ») أما الكل المركب فلا يمكن أبداً أن يكون أحد مكوناته .

٧١ — يمكن أن يعرف الفصل إما بالماصدق وإما بالمفهوم ، نعنى أننا قد نعرف نوع الشىء الذى هو الفصل ، أو نوع التصور الذى يدل على الفصل : وهذا هو المعنى الدقيق للتقابل بين الماصدق والمفهوم ، فى هذا المجال . ولكن ولو أن المعنى يمكن تعريفه بهذه الطريقة الثنائية ، إلا أن الفصول الخاصة ما عدا ما كان منها متناهيا لا يمكن تعريفها إلا بالمفهوم ، كالحال فى الأشياء التى تدل عليها هذه المعانى أو تلك . وعندى أن هذا التمييز هو تمييز نفسانى بحت : أما من الناحية المنطقية فإن التعريف بالماصدق يبدو منطقبا على الفصول غير المتناهية على حد سواء ، غير أنه من الناحية العملية لا يمكننا محاولة ذلك ، لأن الأجل يحول بيننا وبين بلوغ غرضنا من هذه المحاولة المرجوة . يبدو إذن أن الماصدق والمفهوم من الناحية المنطقية يقفان على قدم المساواة . وسأبدأ بالكلام عن وجهة النظر الماصدقية .

عندما نعتبر الفصل معرفاً بتعداد حدوده ، فالأقرب إلى الطبيعى أن يسمى مجموعة . وسأصطنع مؤقتا هذا الاسم لأنه لن يقضى فى هذا الأمر ، نعنى أتكون الأشياء التى يدل عليها فصولا حقاً أم لا . وأعنى بالمجموعة ما يفهم من « ا و ب » أو « ا و حـ » أو أى تعداد آخر لحدود معينة . وتُعرف المجموعة بذكر الحدود الموجودة فى الواقع ، وتربط «الواو» بين حدودها . وقد يبدو أن «الواو» تمثل الطريق الأساسى لربط الحدود ، وهذا الطريق بالذات جوهرى إذا شئنا أن نحصل على نتيجة من تقرير عدد خلاف الواحد . ولا تفترض المجموعات الأعداد ما دامت

تنشأ من مجرد ضم الحدود معاً بواو العطف : ولكنها إنما تفترض الأعداد فى تلك الأحوال الخاصة حيث تكون حدود المجموعة ذاتها أعداداً مفروضة . وثمة صعوبة نحوية يجب التنبيه عليها وقبولها ، ما دمنا لا نجد طريقة أخرى لمفاداتها . فالمجموعة نحوياً فى صيغة المفرد ، على حين أن ا و ب ، ا و ب و حـ إلخ هى فى جوهرها جمع . وتنشأ هذه الصعوبة النحوية من الحقيقة المنطقية (التى سنناقشها بعد قليل) وهى أن كل ما هو كثير بوجه عام يكون كلا واحداً ، فلا سبيل لنا إلى حل هذه الصعوبة باختيار اصطلاح أفضل .

و « بولزانو » Bolzano هو الذى أبرز أهمية فكرة «الواو»[١] . يقول « بولزانو » إنه لكى نفهم اللامتناهى " يجب أن نرجع إلى تصور من أبسط التصورات فى أذهاننا حتى نصل إلى اتفاق فيما يختص باللفظة التى نستعملها فى الدلالة على ذلك التصور ، وهو الذى يقابل واو العطف ، تلك الرابطة التى إذا وجب أن تبرز بالوضوح الذى نريده ، ففى كثير من الأحوال لتحقيق الأغراض الرياضية والفلسفية على السواء ، أعتقد من الأفضل التعبير بهذه الألفاظ : نظام (Inbegriff) من أشياء معينة أو كل يتكون من أجزاء معينة . ولكننا يجب أن نضيف إلى ذلك أن أى شىء فرضناه ا يمكن أن يرتبط فى نظام مع أى ب ، حـ ، ء . . . أخرى ، أو (إذا تكلمنا بدقة أكثر) أنها تكون نظاما يقوم بذاته[٢] ؛ ويمكن أن تنشأ عنه حقيقة على قدر كثير أو قليل من الأهمية بشرط أن كل مجموعة من ا ، ب ، حـ ، ء . . . تمثل فى الواقع شيئا مختلفا ، أو ألا تكون أى هذه القضايا « ا هى نفس ب ، و ب هى نفس حـ ، و حـ هى نفس ء ، ألخ ، صادقة . لأنه إذا كانت مثلا ا هى نفس ب فمن غير المعقول أن نتكلم عن نظام من الأشياء هو ا ، ب " .

والفقرة السابقة ولو أنها جيدة إلا أنها تُغْفل عدة تمييزات نرى أنها ضرورية .

---

(١) Paradoxien die Unendlichen, Leipzig, 1854 (2nd ed., Berlin, 1889, 83)

(٢) أى أن الجمع بين ا وبين ب ، حـ ، د . . . تكون نظاماً .

فليس فيها أولا وقبل كل شيء تمييز بين الكثير وبين الكل الذى يتركب منه . وثانيا لم يلحظ فيها فيما يبدو أن طريقة التعداد لا تنطبق عمليا على الأنظمة غير المتناهية . وثالثا ، وهذه نقطة مرتبطة بالنقطة الثانية ، ليس فى عبارة الفقرة السابقة أى ذكر للتعريف بالمفهوم، ولا معنى الفصل . وما يعنينا هو التمييز إن وجد بين الفصل وبين المجموعة من جهة ، وبين الكل المتكون من المجموعة من جهة أخرى . ويحسن بنا أن نمضى أولا فى الفحص عن معنى «الواو» .

كل شيء يمكن أن يقرره عدد متناه فيما عدا الصفر أو الواحد يمكن أن يقال عنه بوجه عام إنه كثير ، ويمكن القول بأن الكثير هو ما كانت صورته على الدوام هذه الصورة : « ا و ب و حـ و . . . » . فحن نجد هنا أن كلا من ا ، ب ، حـ . . . واحد ، وهى جميعا مختلفة . ويبدو أن القول بأن ا واحد هو نفس القول بأن ا ليس كهذه الصورة « ا$_{١}$ و ا$_{٢}$ و ا$_{٣}$ و . . . » . ويبدو أن قولنا ا ، ب ، حـ . . . هى كلها مختلفة إنما تفيد شرطا بالنسبة للرموز : يجب أن يكون معلوماً أن « ا و ا » لا معنى لها ، فالتعدد مفهوم من استعمال الواو ، ولا حاجة بنا إلى النص على ذلك بوجه خاص .

وقد يمكن اعتبار الحد ا الذى هو واحد كأنه حالة خاصة لمجموعة ، نعنى لمجموعة من حد واحد . وبذلك تفترض مقدما كل مجموعة مركبة من كثرة عدة مجموعات كل منها واحد : أى أن ا ، ب تفترض مقدماً ا وتفترض مقدما ب . وبالعكس تفترض مقدماً بعض المجموعات المركبة من حد واحد كثرة ، وهى المجموعات المركبة . مثال ذلك « ا يختلف عن ب » واحد ، ولكنها تفترض مقدماً ا والاختلاف و ب . إلا أنه لا يوجد تماثل فى هذا الصدد لأن المفروضات النهائية لأى شيء هى دائما حدود بسيطة .

ويمكن أن يرتبط كل زوج من الحدود بغير استثناء بالطريقة التى نشير إليها بقولنا ا و ب ؛ وإذا لم يكن لا ا ولا ب كثرة ، كان ا و ب اثنين . قد يكون ا و ب أى شيئين متصورين ، أى موضوعين ممكنين للفكر ، قد

يكونان نقطتين أو عددين أو قضيتين صادقتين أو كاذبتين ، حادثتين أو شخصين ، وعلى الجملة أى شىء يصلح أن يعد . ولا نزاع فى أن الملعقة والعدد ٣ ، أو الغول والمكان ذو الأربعة الأبعاد ، اثنان . وعلى ذلك فلا ينبغى أن يُفرض أى قيد على ا و ب ، فيما عدا أن أى واحد منهما يكون كثيرا . ومن الضرورى ملاحظة أن ا و ب لا يجب أن تكون موجودة ، ولكنهما كأى شىء يمكن ذكره يجب أن يكون لهما كون . والتمييز بين الكون والوجود مهم[١] ، توضحه عملية العد أحسن توضيح . ذلك أن ما يقبل العد فلابد أن يكون شيئا ما ، ويجب بكل تأكيد أن يكون، ولو أنه لا يحتاج بأى حال إلى أن يتصف بصفة الوجود . صفوة القول لا نطلب من حدود المجموعة سوى أن يكون كل حد شيئاً ما .

ونستطيع الآن أن نسأل هذا السؤال : ما المقصود بـ ا و ب ؟ أيعنى ذلك شيئاً أكثر من تجاور ا و ب ؟ أي هل تشمل أى عنصر أعلى من ا وأعلى من ب ؟ هل «الواو» تصور منفصل يقع إلى جانب ا و ب ؟ ولكل إجابة عن هذه الأسئلة اعتراضات. فأول كل شىء لا يمكن أن تكون الواو فيما نفترض تصوراً جديدا إذ لو كانت كذلك لوجب أن تكون ضرباً من العلاقة بين ا و ب ، وفى هذه الحالة تكون ا و ب قضية ، أو على الأقل تصور قضية ، فتكون بذلك واحدة لا اثنتين . وفضلا عن ذلك فلو كانا تصوران ، فهما اثنان ولا حاجة لتصور متوسط ليجعلهما اثنين ، وبذلك تكون « الواو » لا معنى لها . ومع ذلك فمن الصعب التمسك بهذه النظرية . ولنبدأ فنقول إنه يبدو من المجازفة الذهاب إلى أن أى لفظة تخلو من المعنى . فنحن حين نستعمل لفظة « الواو » لا يبدو أننا نتمم مجرد أنفاس عاطلة ، بل ثمة فكرة مّا يبدو أنها تقابل اللفظ . ومن جهة أخرى يظهر أن هناك ضرباً من الربط يتضمنه الواقع من أن ا و ب اثنان ، وليس هذا صحيحاً عن أى واحد منهما على حدة . عندما نقول « ا و ب أصفران » يمكن

(١) هذا التمييز بين الكون Being والوجود existence من وضع المؤلف، وقد ذكره لا لأند فى قاموسه الفلسفى . [المترجم] .

أن نضع بدلا من هذه القضية أن « ا أصفر » و « ب أصفر » ، ولكننا لا نستطيع أن نفعل مثل ذلك بالقضية « ا و ب اثنان » ؛ على العكس « ا واحد » و « ب واحد » . يحسن إذن فيما يبدو أن نعتبر الواو معبرة عن ضرب محدد فريد من الربط ، ليست علاقة ، وليست ربطا بين ا و ب فى كل ، وإلا كان واحداً . وهذا الضرب الفريد من الربط هو الذى سنسميه فيما بعد جمع الأفراد . ومن المهم ملاحظة أن هذا الربط ينطبق على الحدود ، ولا ينطبق على الأعداد إلا لكونها حدوداً . وعلى ذلك نقول مؤقتاً إن ١ و ٢ اثنان ، أما ١ و ١ فلا معنى لها .

أما فيما يختص بالمقصود من الربط الذى يدل عليه الواو ، فهذا المقصود لا يتميز عما سميناه من قبل بالعطف العددى ، ونعنى بذلك أن ا و ب هو ما يدل عليه تصور الفصل الذى يكون ا و ب أفراده الوحيدين . وإذا كان ى فصل التصور الذى تكون قضاياه « ا هى ى » و « ب هى ى » صادقتين ، وتكون سائر قضاياه الأخرى من نفس الصورة كاذبة » ، إذن « جميع الياءات » هى تصور الفصل الذى تكون حدوده هى ا و ب . وهذا المعنى يدل على الحدين ا و ب مرتبطين بطريقة معينة ، وأن « ا و ب » هما الحدان المرتبطان بتلك الطريقة . وبذلك يكون « ا و ب » الفصل ، ولكنه متميز عن فصل التصور ، وعن تصور الفصل .

ومع ذلك فإن مفهوم الواو لا يدخل فى معنى الفصل ، لأن الحد المفرد فصلٌ ولو أنه ليس عطفا عدديا . فإذا كان ى فصل تصور ، وكانت قضية واحدة فقط من صورة « س هى ى » صادقة ، إذن « جميع الياءات » تصورٌ يدل على حد مفرد ، وهذا الحد هو الفصل الذى تكون « جميع الياءات » تصوره . وهكذا فإن ما يبدو جوهريا للفصل ليس المفهوم من « الواو » بل ما يدل عليه تصور الفصل . وهذا يجرنا إلى وجهة نظر المفهوم للفصول .

٧٢ — لقد اتفقنا فى الباب السابق على عدم وجود طرق مختلفة للدلالة وإنما توجد فقط أنواع مختلفة من التصورات الدالة وما يوازيها من الأنواع المختلفة

للأشياء المدلول عليها . وناقشنا نوع الشيء المدلول عليه والذى يكوّن الفصل ، وعلينا الآن أن ننظر فى نوع التصور الدال .

إن اعتبار الفصول الناشىء عن التصورات الدالة أعم بكثير من الاعتبار الماصدقى وذلك من وجهين ، الأول أنه يسمح بما يستبعده الآخر «عمليا» ، أى قبول الفصول غير المتناهية ؛ والثانى أنه يسمح بإدخال التصور الصفرى للفصل . وقبل مناقشة هذه الأمور علينا أن نفحص مسألة منطقية بحتة على شىء من الأهمية .

إذا كان ى فصل تصور ، فهل التصور « جميع الياءات » قابل للتحليل إلى مُكَوِّنَيه ، جميع و ى ، أو هو تصور جديد محدد بعلاقة معينة مع ى ، وليس أعقد من ى ذاته ؟ ولنبدأ بملاحظة أن جميع « الياءات » مرادفة لقولنا « الياءات » على الأقل تبعا للاستعمال الشائع للجمع ؛ فيرجع سؤالنا إذن إلى معنى الجمع . ولا شك أن لفظة «جميع» لها معنى محدد ، ولكن يبدو من المشكوك فيه جدا أنها تعنى أكثر من الإشارة إلى العلاقة . ذلك أن « جميع الناس » و « جميع الأعداد » تشترك فى هذه الحقيقة وهى أن لها علاقة ما لفصل تصور هو الإنسان والعدد على التوالى ، ولكن يبدو من الصعب جدا عزل أي عنصر من الجمعية all—ness منهما ، اللهم إلا إذا اعتبرنا هذا العنصر مجرد الواقع من أنهما تصوران لفصلين . يبدو إذن أن « جميع الياءات » لا يصح تحليلها إلى جميع و ى ، وأن اللغة فى هذه الحالة كما فى غيرها مضللة . وتنطبق الملاحظة ذاتها على كل ، وأي ، وبعض ، وأحد[١] ، وأل .

وقد يُظن أن الفصل ينبغى أن ينظر إليه لا على أنه مجرد عطف عددى للحدود ، بل على أنه عطف عددي يدل عليه تصور الفصل . ومع ذلك فلن يخدم هذا التعقيد أى غرض مفيد ، فيما عدا الاحتفاظ بالتمييز الذي ذهب إليه «بيانو» بين الحد المفرد وبين الفصل الذى لا يشمل إلا هذا الحد — وهو تمييز يسهل إدراكه حين يتطابق الفصل مع فصل التصور ، ولا يكون مقبولا من

---

(١) لفظة a هى أداة التنكير فى الإنجليزية ولا يوجد ما يقابلها فى اللغة العربية .

وجهة نظرنا للفصول . ومن الواضح أن العطف العددي المعتبر مدلولا به إما أن يكون نفس الشيء غير المعتبر ، أو أنه مركب من الدلالة والشيء المدلول عليه ، وليس هذا الشيء إلا ما نعنيه بالفصل .

أما فيما يختص بالفصول غير المتناهية ، مثل فصل الأعداد ، فلا بد من ملاحظة أن التصور « جميع الأعداد » ولو أنه ليس بذاته مركبا تركيبا لا متناهيا إلا أنه يدل على موضوع مركب تركيبا لا متناهيا . هذا هو السر العميق فى مقدرتنا على معالجة موضوع اللانهاية . ولو وُجد تصور مركب تركيبا لا متناهيا فلن يكون فى مقدور العقل البشري أن يستوعبه . أما المجموعات اللامتناهية فنظراً لفكرة الدلالة فقد يمكن بحثها دون إدخال أي تصور ذي تركيب لا متناه . وينبغي أن نأخذ فى بالنا هذه الملاحظة عند مناقشة موضوع اللانهاية فى الأجزاء الأخيرة من هذا الكتاب ، ولو ذهبت عن بالنا فسنجد جواً سحريا يجعل النتائج التى نحصل عليها تبدو مشكوكا فيها .

٧٣ — وتتصل بالفصول الصفرية صعوبات عظيمة، وبوجه عام بفكرة اللاشيء . ومن الواضح أن ثمة تصوراً هو اللاشيء ، وفى بعض المعانى أن اللاشيء هو شيء ما . والواقع أن هذه القضية : « اللاشيء ليس لا شيء » فى الإمكان ولا ريب تأويلها بحيث تكون صادقة — وهذه نقطة ينشأ عنها التناقض الذي ناقشه أفلاطون فى محاورة السوفسطائى . أما فى المنطق الرمزى فالفصل الصفرى هو ذلك الذى ليس له حدود على الإطلاق، ومن الضروري من الناحية الرمزية إدخال مثل هذه الفكرة . وعلينا الآن أن ننظر أيمكن تجنب المتناقضات التى تنشأ نشأة طبيعية مما سبق .

ومن الضرورى أن ندرك تماما أول كل شيء من أن تصوراً مـّا قد يدل، ولو أنه لا يدل على شيء ، وهذا يحدث عندما تكون هناك قضايا يحدث فيها ذلك التصور المذكور ، ولا تدور تلك القضايا حول ذلك التصور ، بل تكون جميع مثل تلك القضايا كاذبة . أو قل إن التفسير السابق هو أول خطوة نحو

تعليل التصور الدال الذى لا يدل على شىء . ومع ذلك فليس هذا تفسيراً كافيا . خذ مثلا هذه القضية « الغيلان[1] حيوانات » أو « الأعداد الأولى الزوجية ما عدا ٢ أعداد » ، فيظهر أن هاتين القضيتين صادقتان ، ويبدو أنهما لا تتعلقان بالتصورات الدالة بل بما تدل عليه هذه التصورات : ومع ذلك فها هنا استحالة ، لأن التصورات المذكورة لا تدل على شىء ما . يقول المنطق الرمزى إن هذه التصورات تدل على الفصل الصفر ، وأن القضايا المذكورة تقرر أن الفصل الصفر تشمله فصول أخرى . إلا أنه من وجهة نظر الماصدق الدقيقة عن الفصول والتى ذكرناها فيما سبق ينتهى الفصل الذى ليس له حدود إلى لا شىء على الإطلاق : لأن ما كان مجرد جمع للحدود لا يمكن أن يقوم إذا ارتفعت جميع الحدود . ليس لنا إذن إلا أن نلتمس تفسيرا آخر للفصول ، أو نبحث عن طريقة نستغنى بها عن الفصل الصفر .

ويمكن إصلاح التعريف الناقص الذي ذكرناه عن التصور الدال دون أن يدل على شىء على النحو الآتى : فقد رأينا أن جميع التصورات الدالة فرع من فصول التصورات ، وإذا كان ا فصل تصور ، كانت « س هى ا » دالة القضية . ولن تدل التصورات الدالة المرتبطة بـ ا على شىء إلا عندما تكون « س هى ا » باطلة من جهة قيمة س . فهذا هو التعريف الكامل للتصور الدال الذى يدل على شىء ، وفى هذه الحالة سنقول إن ا فصل تصور صفر ، وأن « جميع ا » تصور صفر لفصل . ليست هناك إذن حاجة إلى نشأة صعوبات فنية فى ظل مذهب مثل مذهب « بيانو » فصوله التى يسميها فصولا هى فى الحقيقة فصول تصورات . أما عندنا فلا تزال أمامنا مشكلة منطقية حقة باقية .

وقد يمكن بسهولة تفسير هذه القضية « الغيلان حيوانات » على سبيل اللزوم الصورى بأن معناها « س غول يلزم عنه أن س حيوان لجميع قيم س » . ولكننا حين بحثنا فى الفصول قد افترضنا أن القضايا المشتملة على جميع أو أى

(١) Chimeara كائن خرافى ، وترجمناه بالغول فى العربية لهذا السبب .

أو كل ولو أن فصولها متساوية نتيجة اللزوم الصورى إلا أنها متميزة عنها وتنشأ منها أفكار تحتاج إلى مناقشة مستقلة . وفى حالة الغيلان من السهل استبدال وجهة نظر المفهوم البحتة التى بمقتضاها يكون ما يقرر فى الواقع عبارة عن علاقة بين محمولات ، وفى الحالة المذكورة تكون صفة الحيوان جزءاً من تعريف الصفة خرافية . ومرة أخرى من الواضح أننا بصدد قضية يلزم عنها أن الغيلان حيوانات ، ولكنها ليست نفس القضية — والواقع فيما يختص بهذه الحالة ليس اللزوم متبادلا . ويمكن بالسلب أن نعطى ضرباً من التفسير الماصدقى فنقول : لا شىء مما يدل عليه الغول لا يدل عليه حيوان . ولكن هذا التفسير غير مباشر جدا . صفوة القول يبدو من الأصوب استبعاد القضية أصلا مع استبقاء القضايا الأخرى المتعددة التى تكون مكافئة لها إذا كانت الغيلان موجودة . سيشعر المناطقة الرمزيون الذين جربوا فائدة القول بالفصل الصفر أن هذه الوجهة من النظر رجعية . غير أنى لست معنيا فى الوقت الحاضر بمناقشة ما ينبغى عمله فى الحساب التحليلى المنطقى حيث يظهر لى أن ما جرى عليه العمل هو الأفضل ، بل الحقيقة الفلسفية المتصلة بالفصل الصفر . خلاصة القول إنه من بين مجموعة التفسيرات المتكافئة ذات الصيغ المنطقية الرمزية ، يعجز صنف التفسيرات المذكورة فى الباب الحاضر والتى تعتمد على الفصول الواقعية إذا كنا بصدد فصول التصورات الصفر على أساس عدم وجود فصل صفر بالفعل .

ولعلنا نعود الآن إلى النظر فى هذه القضية : « لا شىء ليس لا شىء » . وهى قضية من الواضح أنها صادقة ، ومع ذلك فإنها إذا لم تعالج بعناية أصبحت مصدر نقائض نعجز عن حلها . ذلك أن «لا شىء» تصورٌ دال لا يدل على شىء . والتصور الدال ليس بالطبع لا شىء ، نعنى لا يُدَل عليه بنفسه . وهذه القضية التى تبدو مغرقة فى التناقض لا تعنى أكثر مما يأتى : لا شىء ، وهو التصور الدال ، ليس لا شىء ، أى ليس ما يدل بذاته . ولا يستتبع ذلك بأى حال وجود فصل صفر بالفعل : إذ لا يسمح فقط إلا بفصل التصور

الصفر وتصور الفصل الصفر .

وهنا نجد أنفسنا بإزاء صعوبة جديدة ، ذلك أن تساوى فصول التصورات كجميع العلاقات المنعكسة reflexive، والمماثلة ، والمتعدية transitive، يشير إلى مطابقة مضمرة ، أى أنه يشير إلى أن لكل فصل تصور مع حد معين علاقة توجد كذلك بين جميع فصول التصورات المتساوية وبين ذلك الحد — من جهة أن هذا الحد يختلف باختلاف ضروب فصول التصورات المتساوية ، ولكنه واحد بالنسبة للأفراد المتعددين لضرب واحد من فصول التصورات المتساوية . ويوجد هذا الحد فى الفصل المقابل، وذلك فى جميع فصول التصورات التى ليست صفرا ، ولكن أين يمكننا أن نجده فى فصول التصورات الصفر؟ وثمة إجابات متعددة لهذا السؤال يمكن اصطناع أى واحد منها . فنحن إذ نعلم الآن ما الفصل، فقد يمكن اتخاذ الحد الذى نريده فصل جميع فصول التصورات الصفر ، أو جميع دوال القضايا الصفر . وليست هذه فصولا صفرا ، بل فصولا حقيقية ، لها مع الفصول التصورات الصفر نفس العلاقة . فلو شئنا الحصول على شىء يشبه ما سميناه فى مكان آخر بالفصل ، إلا أنه يقابل فصول التصورات الصفر ، فسنجد أنفسنا مضطرين حيثما كان ذلك ضروريـًّا (كالحال فى عد الفصول) إلى إدخال حد يتطابق مع فصول التصورات المتساوية ، وأن نستبدل حيثما كان فصل فصول التصورات المساوى لفصل تصورٍ معلوم بالفصل المقابل لفصل التصور ذاك . ولو أن الفصل المقابل لفصل التصور يبقى أساسيا من الناحية المنطقية لكننا لا نحتاج إلى استعماله بالفعل فى رموزنا . والواقع ، فإن الفصل الصفر هو بنحو مّا شبيه بالعدد غير المُنْطَق فى الحساب : فلا يمكن تفسيره بنفس المبادئ كغيره من الفصول . وإذا شئنا أن نقدم تفسيرا يشبه ذلك فى مكان آخر ، فيجب أن نستبدل بالفصول أشياء أخرى أكثر تعقيدا — وفى الحالة التى نحن بصددها بعض الفصول المرتبطة بعلاقة مشتركة . وسيكون الغرض من هذا الإجراء فنيا قبل كل شىء ، غير

أن الفشل فى فهم هذا الإجراء سيؤدى إلى صعوبات مستعصية فى تفسير الرمزية . ويحدث باستمرار إجراء شبيه جدا بهذا فى الرياضة ، مثال ذلك كل تعميم للعدد . ولم تُفَسّر أى حالة حدث فيها هذا التعميم تفسيرا صحيحا فيما أعرف سواء من الرياضيين أو من الفلاسفة . وحيث كنا سنصادف الكثير من الأمثلة فى خلال هذا الكتاب فلا داعى للوقوف عند هذه النقطة فى الوقت الحاضر ، فيما عدا التنبيه على حالة واحدة ممكنة من سوء الفهم . ليس ثمة دور يؤخذ من الكلام السالف ذكره عن الفصل الصفر ، لأن المعنى العام عن الفصل حين يوضع أولا يؤدى إلى ما يسمى بالوجود ، ثم رمزياً بعد ذلك لا فلسفياً ، تحل محله فكرة فصل من فصول التصورات المتساوية ، وعندئذ نجد أنه فى هذه الصورة الجديدة ينطبق على ما يناظر فصول التصورات الصفر ، ما دام هذا المناظر هو الآن ليس صفرا . ويوجد بين الفصول البسيطة وفصول التصورات المتساوية ارتباط الواحد بالواحد ، ويسقط فى حالة وحيدة هى فصل فصول التصورات الصفر والذى لا يناظره أى فصل صفر . وهذه الحقيقة هى السر فى جميع هذا التعقيد .

٧٤ — وعلينا الآن أن نناقش بطريقة أولية إلى حد ما مسألة أساسية جدا فى فلسفة الحساب وهى : هل نعتبر الفصل المتواطئ الحدود واحداً أو كثيراً ؟ لو أخذنا الفصل مساوياً ببساطة للعطف العددى « ا ، ب ، حـ ، إلخ » فقد يبدو من الواضح أنه كثير ، ومع ذلك فمن الضرورى أن نتمكن من عد الفصول وكأن كلا منها واحدا ، وهذا ما نفعله عادةً حين نتكلم عن فصل « مَّا »[1] . وهكذا يظهر أن الفصول تكون واحدة من جهة ، وكثيرة من جهة أخرى .

وقد نميل إلى مطابقة الفصل ككثير والفصل كواحد ، مثال ذلك جميع الناس والجنس البشرى . وعلى الرغم من ذلك فحيثما كان الفصل مشتملا على أكثر من حد واحد فيمكن إثبات أن مثل تلك المطابقة غير مقبولة .

(١) فى الأصل a class ، بالتنكير . [المترجم] .

فتصور الفصل إذا كان دالا على الفصل كواحد فليس هو ذاته أى واحد من تصور الفصل الذى يدل عليه ، وبمعنى آخر فصول جميع الحيوانات العاقلة والتى تدل على الجنس البشرى كحد واحد مختلفة عن الناس هو الحد الذى يدل على الناس ، أى على الجنس البشرى ككثير . أما إذا كان الجنس البشرى مطابقا للناس ، فيترتب على ذلك أن كل ما يدل عليه أحدهما فلا بد أن يدل عليه الآخر ، وبذلك تستحيل التفرقة المذكورة . وقد نميل إلى استنتاج أن التمييز الذى عقده «بيانو» ، بين الحد وبين الفصل الذى حده الوحيد هذا الحد، يجب أن نتمسك به على الأقل فى حالة أن يكون الحد المذكور فصلا .(١) ولكنى أعتقد من الأصوب أن ننتهى إلى تمييز مطلق بين الفصل ككثير وبين الفصل كواحد ، وأن نذهب إلى أن الكثير كثير فقط وليس أيضاً واحدا . وقد يتطابق الفصل كواحد مع المجموع المركب من حدود الفصل ، مثال ذلك فى حالة الناس ، الجنس البشرى يكون الفصل كواحد .

ولكن أمكننا الآن تجنب ذلك التناقض الذى كنا نخشاه دائما ، نعنى وجود شيء لا يمكن أن يتخذ موضوعاً منطقيا ؟ أما أنا شخصيا فلست أدرى أى سبيل للكشف عن تناقض محكم فى هذه الحالة . فى حالة التصورات كنا بصدد شيء واحد ، وكان ذلك واضحاً ، أما فى هذه الحالة فنحن بإزاء مركب قابل فى أساسه للتحليل إلى وحدات . فى مثل هذه القضية « ا و ب اثنان » لا يوجد موضوع منطقى ، لأن الحكم لا يدور على ا ولا على ب ، ولا على المجموع المركب منهما ، بل يقوم فقط وبدقة على ا و ب . ومن هذا قد يبدو أن الأحكام لا يلزم أن تكون منصرفة إلى موضوعات مفردة ، بل قد تنصرف إلى موضوعات كثيرة ، وهذا يرفع التناقض الذى نشأ فى حالة التصورات من استحالة الحكم عليها إلا إذا تحولت إلى موضوعات . ولما كانت هذه

(١) هذه النتيجة وصل إليها فريج بالفعل من حجة مماثلة — انظر . Archiv für syst. Phl. I, p. 444. وراجع الملحق .

الاستحالة غير موجودة هنا ، لم ينشأ التناقض الذى كنا نخشاه .

٧٥ – وقد نسأل كما توحى بذلك المناقشات السابقة عن الأمر فى الأشياء التى يدل عليها قولنا : إنسان ، كل إنسان ، بعض الناس ، وأى إنسان ، أتكون هذه الأشياء واحداً أو كثيرا ، أو لا هذا ولا ذاك ؟ أما النحو فيعاملها جميعا معاملة الواحد . ولكن الاعتراض الطبيعى على هذا الاعتبار هو : أى واحد ؟ لا شك أنه ليس سقراط ، أو أفلاطون ، أو أى شخص آخر معين . أفيمكن أن نستخلص من ذلك أن أحداً ليس مدلولا عليه ؟ أو نستخلص أن كل واحد مدلول عليه ، وهذا يصدق فى الواقع على هذا التصور : « كل إنسان » . والذى أعتقده هو أن الواحد مدلول عليه فى كل حالة ، ولكن ذلك باستغراق متواطئ . فقولنا : أى عدد ليس ١ أو ٢ ، ولا أى عدد آخر معين . ومن أجل ذلك من السهل أن نستنتج أن أى عدد ليس أى عدد بالذات ، وهى قضية ولو أنها تظهر لأول وهلة متناقضة إلا أنها نشأت فى الواقع من إبهام لفظة « أى » ، ونعبر عنها بدقة أكثر حين نقول : « أى عدد ليس عددا مَّا بالذات » . ومع ذلك فهناك ألغاز فى هذا الباب لم أعرف حتى الآن كيف أحلها .

وتبقى صعوبة منطقية تخص طبيعة الكل المركب من جميع الحدود فى فصل . وثمة قضيتان يبدو أنهما بينتان بذاتهما : (١) الكلان المركبان من حدود مختلفة يجب أن يكونا مختلفين . (٢) الكل المركب من حد واحد فقط هو ذلك الحد الواحد . ويترتب على ذلك أن الكل المركب من فصل معتبر كأنه حد واحد هو ذلك الفصل المعتبر كأنه حد واحد ، وينطبق بناء على ذلك مع الكل المركب من حدود الفصل . غير أن هذه النتيجة تتناقض مع أول مبدأ بين بذاته فرضناه . والجواب فى هذه الحالة ليس مع ذلك صعبا ، ذلك أن أول المبدأين لا يكون صدقه عاماً إلا حين تكون جميع الحدود التى يتركب الكلان منها بسيطة . ثم أى كل إذا كان مشتملا على أكثر من جزأين ففى الإمكان تحليله بطرق كثيرة ، وتكون الأجزاء الناشئة عن ذلك مختلفة

باختلاف طرق التحليل، بشرط ألا نمضى فى التحليل إلى غير نهاية . وهذا يثبت أن مجموعات مختلفة من الأجزاء قد يتركب منها نفس الكل ، وبذلك تنحل صعوبتنا .

٧٦ — ويجب أن نقول شيئا عن العلاقة بين الحد وبين الفصل الذى يكون فرداً من أفراده ، وعن العلاقات المتعددة المرتبطة بذلك . وسنسمى إحدى هذه العلاقات المرتبطة ε ، وسيكون لها دور أساسى فى المنطق الرمزى . ومع ذلك فالأمر متروك لاختيارنا فى اتخاذ أى العلاقتين واعتباره أساسياً من الناحية الرمزية .

من الناحية المنطقية العلاقة بين الموضوع والمحمول هى العلاقة الأساسية التى يُعبر عنها قولنا : « سقراط إنسانى » — وهى علاقة كما رأينا فى الباب الرابع غريبة من جهة أن المتعلق relatum لا يمكن اعتباره حداً فى القضية . وأول علاقة تنشأ عن هذه هى تلك التى تجرى فى هذه العبارة : « سقراط له إنسانية » وهى التى تتميز بأن العلاقة فيها حد . ويأتى بعدذلك : « سقراط إنسان » . وهذه القضية المعتبرة كعلاقة بين سقراط وبين التصور إنسان هى تلك التى يعدها « بيانو » أساسية ، والرمز الذى يضعه وهو ε يعبر عن العلاقة "is a" بين سقراط وإنسان ، والمعبر عنها بقولنا فى العربية « هو »[1] . وما دمنا نستعمل فصول التصورات محل الفصول فى رموزنا فلا اعتراض على الإجراء السابق . ولكن إذا أعطينا ε هذا المعنى ، فلا ينبغى أن نفترض أن رمزين يمثلان فصلى تصورين متساويين ، فهما معاً يمثلان شيئاً واحداً بالذات . ولنرجع إلى العلاقة بين سقراط والجنس البشرى ، أى بين حد وفصله المعتبر ككل ، وهذا هو الذى يعبر عنه بقولنا : « سقراط ينتمى إلى الجنس البشرى » . فهذه العلاقة قد يمكن أن يمثلها الرمز ε . ومن الواضح أن الفصل ما دام كثيرا ، ما عدا

(١) فى المنطق القديم تسمى العلاقة رابطة . ويلاحظ أن القضية فى اللغة العربية تكون الرابطة مضمرة ، وإذا صرح بها قيل « سقراط هو إنسان » ، أما الرابطة فى اللغة الإنجليزية فهى فعل الكينونة ولذلك يقال Socrates is a man ولذلك لزم التنويه. (المترجم)

إذا كان ذا حد واحد ، فلا يمكن من حيث هو كذلك أن يمثله حرفٌ واحد ، ومن ثم ففى أى منطق رمزى ممكن لا يمكن للحروف التى تقوم مقام الفصول أن تمثل الفصول ككثير ، بل لا بد أن تمثل إما فصول التصورات ، أو الكلات المركبة من فصول ، أو أى أشياء أخرى مفردة مرتبطة بعضها ببعض . من أجل ذلك لا يمكن أن تمثل ε العلاقة بين الحد وفصله ككثير ، وإلا كان ذلك علاقة بين حد واحد وحدود كثيرة ، لا علاقة بين حدين كتلك التى نريدها . وهذه العلاقة يمكن أن نعبر عنها بقولنا : « سقراط واحد من الناس » . ولكن هذه العلاقة على أى حال لا يمكن أن تؤخذ على أنها تدل على معنى ε .

٧٧ — وهناك علاقة كانت قبل « بيانو » تكاد بالإجماع تختلط بالرمز ε ، هى علاقة الاستغراق بين الفصول كما هى الحال مثلا بين الناس والفانين . وهذه علاقة مشهورة من حيث إنها تقع فى الصورة التقليدية للقياس ، وكانت موضع نزاع بين المفهوم والماصدق ، وكثر حولها النقاش حتى أصبح من الغريب أن يبقى شىء يقال عنها . ويذهب التجريبيون إلى أن مثل هذه القضايا تدل على تعداد فعلى للحدود التى يشملها الفصل مع تقرير انتساب الحدود للفصل الذى يشملها . ويجب أن يعتبر التجريبيون ، فيما يلزم عن مذهبهم ، أن مسألة كون جميع الأعداد الأولية صحيحة مسألة مشكوك فى صحتها ما داموا لا يجرءون على القول بأنهم قد فحصوا جميع الأعداد الأولية عدداً عدداً . أما المعارضون لهم فقد ذهبوا على العكس منهم عادةً إلى أن المقصود هو علاقة كل وجزء بين المحمولات ، ولكن هذه العلاقة قد تحولت إلى الاتجاه المقابل عن العلاقة بين الفصول : أى أن المحمول المعرف للفصل الأكبر جزءٌ من من الأصغر . وتبدو هذه النظرة أقرب إلى القبول من الأخرى ، وحيثما وُجدت مثل هذه العلاقة بين المحمولات المعرفة ترتبت عليها علاقة الاستغراق . ومع ذلك فيمكن إثارة اعتراضين ، الأول أنه فى بعض حالات الاستغراق لا توجد مثل هذه العلاقة بين المحمولات المعرفة ، والثانى أنه فى أى حالة فالمقصود

هو علاقة بين الفصول لا علاقة بين محمولاتها المعرفة . ويمكن بسهولة إثبات النقطة الأولى بالأمثلة . فالتصور « العدد الأولى الزوجى» لا يشمل هذا التصور وهو « عدد صحيح بين ١ ، ١٠ » كجزء داخل فى تكوينه ؛ والتصور « ملك إنجليزى قطعت رأسه » لا يشمل هذا التصور « الناس الذين ماتوا فى عام ١٦٤٩ » ؛ وهكذا فى أمثلة كثيرة واضحة . ويمكن الرد على ذلك بقولنا إنه ولو أن علاقة المحمولات المعرفة ليست علاقة كل وجزء إلا أنها شبيهة فى كثير أو قليل بعلاقة اللزوم ، وهى دائما تلك التى تعنيها فى الواقع قضايا الاستغراق .

وأعتقد أن مثل هذه النظرة تمثل ما يقوله أفضل أنصار المفهوم ، ولا يعنينى إنكار أن مثل هذه العلاقة المذكورة توجد دائما بين محمولات معرفة لفصلين يشتمل أحدهما على الآخر . ثم تبقى النقطة الثانية مما سبق ذكره صحيحة بالنسبة إلى أى تفسير بالمفهوم . ذلك أننا حين نقول إن الناس فانون ، فمن الواضح أننا نقول شيئاً ما عن الناس لا عن التصور « الإنسان » أو المحمول « إنسانى» . فالسؤال الذى نواجهه إذن هو ماذا نقوله بالضبط ؟

لقد ذهب « بيانو » فى طبعات سابقة من كتابه المسمى Formulaire إلى أن ما نقرره هو اللزوم الصورى أى « س إنسان يلزم عنه أن س فان » . ولا شك أن هذا متضمن ، ولكنى لا أستطيع إقناع نفسى بأنها القضية ذاتها ، إذ فى هذه القضية ، كما رأينا فى الباب الثالث ، من الجوهرى أن تأخذ س جميع القيم لا تلك فقط الخاصة بالناس . أما حين نقول : « جميع الناس فانون » فيبدو من الواضح أننا نتكلم فقط عن الناس لا عن جميع الحدود الأخرى المتخيلة . وقد يمكن من أجل بلوغ علاقة حقيقية للفصول اعتبار الحكم وكأنه حكم كل وجزء بين الفصلين المعتبر كل منهما كأنه حد واحد . أو لعلنا نستطيع أن نخلع على هذه القضية صورة ماصدقية بحتة بأن نجعل معناها كالآتى : «كل» « أو أى » إنسان فان . وتثير هذه القضية مسائل غاية فى الطرافة تخص نظرية الدلالة : إذ يبدو أنها تقرر تطابقا . ومع ذلك فمن

الواضح أن ما يدل عليه كل إنسان يختلف عما يدل عليه فان . وهذه الأسئلة على ما فيها من طرافة لا نستطيع المضى فى بحثها هنا . ويلزمنا فقط أن ندرك بوضوح ما هى القضايا المتعددة المتكافئة التى تنشأ عن تداخل فصل فى الآخر . والصورة الأكثر أهمية للرياضيات هى ولا شك تلك التى تتعلق باللزوم الصورى مما سنفرد له مناقشة جديدة فى الباب المقبل .

وعلينا أخيراً أن نتذكر أن الفصول يجب أن تشتق عن طريق هذه الفكرة ، وهى «مثل » من مصادر أخرى خلاف القضايا الحملية (ذات الموضوع والمحمول) وما يكافئها . وأى دالة قضية يكون فيها الحكم الثابت قائماً على حد متغير فيجب اعتبارها كما وضحنا فى الباب الثانى سبيلا إلى ظهور فصل من القيم تحققها ، ويحتاج هذا الموضوع إلى مناقشة مسألة الأحكام ، ولكن إحدى المتناقضات الغريبة الشأن والتى تستلزم العناية بالتمييز المقصود من الحديث فى هذا الباب قد يمكن المبادرة بذكرها فوراً .

٧٨ — معظم المحمولات العادية على خلاف سائر المحمولات لا يمكن أن تحمل على ذاتها، ولو أننا حين نستعمل المحمولات السلبية نجد كثيرا منها يصلح أن تحمل على ذاتها . وإحدى هذه الحالات، ونعنى بها قبول الحمل أو صفة كونها محمولا، ليست سلبية ، فقبول الحمل كما هو واضح أن يكون قادرا على الحمل، أى أن يكون محمولا على ذاته ، ولكن معظم الأمثلة المشهورة سلبية ، كما تقول للاإنسانية هى لا إنسانى ، وهلمجرا . فالمحمولات التى لا تكون قادرة على الحمل على ذاتها ليست بناءً على ذلك إلا طائفة من جملة المحمولات ، ومن الطبيعى أن نفترض أنها تكون فصلا له محمول معرف . فإذا كان الأمر كذلك فلنفحص عن هذا المحمول المعرف أينتمى إلى الفصل أم لا ، فإذا كان منتميا للفصل فليس يقبل الحمل على ذاته إذ ذلك خاصة الفصل المميزة له . أما إذا لم يقبل الحمل على ذاته فلن ينتمى إلى الفصل الذى هو بالنسبة إليه المحمول المعرف مما يناقض الفرض السابق . ومن جهة أخرى إذا لم يكن منتميا للفصل

الذى هو له المحمول المعرف ، فلن يكون قابلا للحمل على ذاته ، أى أنه ليس أحد تلك المحمولات ، ويترتب على ذلك أنه ينتمى إلى الفصل الذى هو له المحمول المعرف — وهذا يناقض الفرض مرة أخرى . فالتناقض يلزم عن كلا الفرضين . وسأعود إلى الحديث عن هذا التناقض فى الباب العاشر ، ولم أتكلم عنه الآن إلا لأبين أنه لا يحتاج فى تمييزه إلى دقة عميقة .

٧٩ — وخلاصة ما ذكرناه من مناقشة للموضوع طالت بعض الشىء هى أن الفصل فى رأينا لا بد أن يفسر جوهريا بالماصدق ، فإما أن يكون حدا واحدا ، وإما أن يكون من ذلك الضرب من التأليف بين الحدود حين ترتبط بهذه الأداة وهى «الواو» . إلا أنه من الناحية العملية لا النظرية لا يمكن أن تنطبق هذه الطريقة الماصدقية البحتة إلا على الفصول المتناهية . فجميع الفصول متناهية كانت أم غير متناهية يمكن الحصول عليها كأشياء تدل عليها فصول التصورات فى صيغة الجمع — مثل الناس ، الأعداد ، النقط ، ألخ . وحين بدأنا القول بالمحمولات ميزنا نوعين من القضايا النموذج لهما : « سقراط إنسانى » و « سقراط له إنسانية » ، فالأولى تستعمل « إنسانى » كمحمول ، والثانية كحد لعلاقة . ومع أن هاتين القضيتين فى غاية الأهمية منطقيا إلا أنهما تهمان الرياضة كما تهتم بغيرهما من مشتقاتهما . ثم بدأنا من إنسانى فميزنا (١) فصل التصور إنسان الذى يختلف اختلافا يسيرا ، إن اختلف ، عن إنسانى (٢) التصورات المتعددة الدالة مثل « جميع الناس » و « كل إنسان » ، « أى إنسان » ، « إنسان » و « إنسان مـّا » (٣) الأشياء التى تدل عليها هذه التصورات . وقلنا إن التصور الذى يدل عليه قولنا جميع الناس يسمى الفصل ككثير ، بحيث يسمى جميع الناس تصور الفصل (٤) الفصل كواحد ، أى الجنس البشرى . وحصلنا أيضاً على تصنيف للقضايا المتصلة بسقراط يعتمد على التمييزات المذكورة ويكاد يوازيها . (١) « سقراط هو إنسان »[1] ينطبق تقريباً إن لم يكن تماماً على قولنا

Socrates is a man (١)

« سقراط له إنسانية » . (٢) « سقراط هو إنسان »[1] قضية تعبر عن التطابق بين سقراط وواحد من الحدود التى يدل عليها المحمول إنسان (٣) « سقراط واحد من الناس » قضية تثير صعوبات ناشئة عن كثرة الناس (٤) « سقراط ينتمى للجنس البشرى » هى القضية الوحيدة التى تعبر عن العلاقة بين الفرد وفصله ، وتأخذ الفصل كواحد لا ككثير طبقا لما تتطلبه إمكانية العلاقة . وذكرنا أن الفصل الصفر الذى ليس له حدود خرافة ، على الرغم من وجود فصول تصورية صفر . وقد ظهر من خلال المناقشة أنه على الرغم من أى بحث رمزى يجب أن ينظر إلى حد كبير فى الفصول التصورية والمفهوم ، فإن الفصول والماصدق من الناحية المنطقية أكثر أساسية لمبادئ الرياضة ، ويمكن اعتبار هذه النتيجة ممثلة لجوهر مقصودنا من هذا الباب .

---

(١) Socrates is a man

الباب السابع

دوال القضايا

٨٠ — حاولنا فى الباب السابق أن نبين نوع الشيء الذى يسمى الفصل ، ثم اعتبرنا الفصول على أنها مشتقة من القضايا الحملية وذلك لأسباب تتعلق بمناقشة الموضوع . ولم يؤثر ذلك فى نظرتنا إلى فكرة الفصل ذاته ، ولكننا إذا تمسكنا بها فقد تقيد إلى حد كبير تعميم الفكرة . والأغلب أنه من الضرورى اعتبار الفصل شيئا لا يعرف بواسطة القضية الحملية ، وتفسير هذه الضرورة نجده فى نظرية الأحكام ، والإشارة بقولنا « مثل » .

أما الفكرة العامة عن الحكم ، فقد سبق شرحها عند الكلام على اللزوم الصورى ؛ أما فى هذا الباب فسنفحص فحصا نقديا عن مجالها وشرعيتها ، كما سنفحص عن صلتها بالفصول و بـ «مثل» . وهذا الموضوع زاخر بالصعوبات وسأعرض المذاهب التى أنوى الدفاع عنها على الرغم من أن ثقتى بصوابها محدودة .

وقد يبدو لأول وهلة أن فكرة «مثل» مما يقبل التعريف ، فقد جرى «بيانو» بالفعل على تعريف هذه الفكرة بالقضية الآتية : « كل س ح مثل س ح هى ا فهى الفصل ا » . وبصرف النظر عن اعتراضات أخرى تدرك لأول وهلة فإننا نلاحظ أن الفصل الذى حصلنا عليه بقولنا «مثل» هو الفصل الحقيقى مأخوذا من ناحية الماصدق ككثير ، على حين أن ا فى القضية « س ح هى ا » ليست الفصل بل فصل التصور . ولذلك كان من الضرورى صورياً إذا كان علينا قبول طريقة بيانو أن نضع بدلا من « كل س ح مثل كذا وكذا » الفصل التصورى الحقيقى « س ح مثل كذا وكذا » وهو الذى يمكن اعتباره حاصلا من المحمول

« مثل كذا وكذا » ؛ أو الأولى أن نقول « فى حالة كون س مثل كذا وكذا » . وهذه الصورة الأخيرة ضرورية ، لأن كذا وكذا دالة قضية تشمل س . ولكن حتى مع إجراء هذا التصحيح الصورى البحت فيبقى أن « مثل » يجب فى الأغلب أن توضع قبل هذه القضايا كقولنا س ع ا حيث تكون ع هى علاقة معينة و ا حد معين . ولا نستطيع رد هذه القضية إلى الصورة « س هى اَ » دون استعمال « مثل » ، لأننا إذا سألنا عن اَ ماذا يجب أن تكون، فالجواب هو : اَ يجب أن تكون بحيث يكون لكل حد من حدودها لا غير تلك العلاقة ع إلى ا . ولنضرب أمثلة عن الحياة اليومية : أبناء إسرائيل فصل مُعرفٌ بعلاقة معينة مع إسرائيل ، ولا يمكن أن يعرف الفصل إلا إذا كان للحدود هذه العلاقة . ويمكن القول على وجه التقريب إن « مثل » تكافىء « الذى »[١] ، وتقوم مقام المعنى العام من تحقيق دالة القضية . غير أننا نستطيع الذهاب أبعد من ذلك فنقول : إذا فرضنا فصلا هو ا فلا نستطيع أن نعرف بحدود ا فصل القضايا « س هى ا » لقيم س المختلفة . ومن الواضح أن ثمة علاقةً بين كل من هذه القضايا وبين س التى تقع فيها ، وأن العلاقة المذكورة محددة حين تكون ا معينة . ولنسم العلاقة ع، فيكون أى شيء متعلق به بالنسبة إلى ع فهو قضية من الصنف« س هى ا »؛ ولكن هنا معنى « مثل» قد استعمل من قبل. ثم إن العلاقة ع ذاتها إنما يمكن أن تعرف على أنها العلاقة التى تقوم بين « س هى ا » وبين س لجميع قيم س ، ولكنها لا تقوم بين أى زوجين آخرين من الحدود . وهنا تظهر « مثل» مرة أخرى. ونحب أن نذكر أن النقطة الهامة بوجه خاص فى هذه الملاحظات هى عدم قبول دوال القضايا للتعريف . فإذا سلمنا بهذه الأمور أمكن بسهولة تعريف المعنى العام للدوال ذات القيمة الواحدة . وكل علاقة كثير بواحد ، أى كل علاقة فيها لمتعلق به معين referent متعلق relatum واحد فقط ، فإنها تعرِّف دالة ، ذلك أن المتعلق هو دالة المتعلق به

(١) Who or which

التى تعرفها العلاقة المذكورة . ولكن حيث تكون الدالة قضية فإن المعنى الناشىء عن ذلك يكون مفروضاً من قبل فى الرمز بحيث لا يمكن تعريفه بهذا الرمز دون الوقوع فى دور ، لأن التعريف العام للدالة المذكور من قبل قد استخدم كذلك دوال القضايا . أما فى حالة القضايا التى من هذا الصنف « س هى ا » ، فلو سألنا ما القضايا التى من هذا الصنف فلا جواب إلا أن نقول : « جميع القضايا التى يقال فيها عن حد ما إنه ا » ، وهنا يظهر ثانياً المعنى المطلوب تعريفه .

٨١ — هل يمكن للعنصر اللامُعَرَّف المتضمن فى دوال القضايا أن يتطابق مع حكم ، وكذلك مع معنى كل قضية تشتمل على حكم معين ، أو مع حكم ينسب إلى كل حد ؟ وعندى أن البديل الوحيد لذلك هو قبول المعنى العام لدالة القضية نفسه على أنه لا يمكن تعريفه ، وهذا لا شك أفضل سبيل يحقق أغراضنا الصورية . أما فلسفيا فالمعنى يظهر لأول وهلة قابلا للتحليل ، وعلينا أن نفحص عن هذا المظهر أخادع هو أم لا .

لقد رأينا عند مناقشة الأفعال فى الباب الرابع أن القضية حين تحلل تماما إلى أجزائها البسيطة فإن هذه الأجزاء إذا ركبت معاً فلا تعيد تكوينها . وقد نظرنا كذلك فى تحليل غير تام للقضايا إلى موضوع وحكم ، ورأينا أن هذا التحليل لا يهدم القضية كثيرا . حقاً إن مجرد وضعنا موضوعاً بجوار حكم لا يكوّن قضية ، ولكن ما يلبث الحكم أن يقال بالفعل على الموضوع حتى تعود القضية إلى الظهور . والحكم هو كل ما يبقى من القضية بعد حذف الموضوع ، ويبقى الفعل فعلا يقال ولا ينقلب اسم فاعل . أو على أى حال يحتفظ الفعل بتلك العلاقة الغريبة التى لا يمكن تعريفها مع الحدود الأخرى من القضية مما يميز العلاقة المتعلقة من نفس العلاقة حين ننظر إليها نظرا مجردا . هذه الفكرة من الحكم ما مداها وما شرعيتها هى التى سنقوم الآن بفحصها . هل يمكن اعتبار كل قضية حكما له صلة بأى حد داخل فيها ، أو أنه لا بدّ من وجود قيود لصورة القضية وللطريقة التى يكون الحد داخلا فيها ؟

فى بعض الحالات البسيطة من الواضح أن تحليل القضية إلى موضوع وحكم أمرٌ مشروع ، فنى قولنا « سقراط إنسان » يمكننا ببساطة تمييز سقراط وما يقال عليه ، ويجب أن نسلم دون تردد أن الشىء نفسه قد يقال على أفلاطون أو أرسطو. وهكذا يمكننا اعتبار فصل من القضايا يشمل هذا الحكم ، وهذا هو الفصل الذى عدده النموذجى يُمَثَّل بقولنا : « س هو إنسان » . ولا بد من ملاحظة أن الحكم يجب أن يظهر كحكم لا كحد . مثال ذلك: « أن يكون المرء إنسانا هو أن يتعذب » قضية تحتوى على نفس الحكم، ولكنه قد استعمل كحد ، وهذه القضية لا تنتمى إلى الفصل الذى نبحث فيه . أما فى حالة القضايا التى تقرر علاقة ثابتة مع حد ثابت فإن التحليل يبدو كذلك غير منكور. مثال ذلك: ما طوله أكثر من ياردة، حكم محدد تماما، ويمكننا النظر فى فصل القضايا التى يحصل فيها هذا الحكم والتى ستمثلها دالة القضية « س طولها أكثر من ياردة » . وفى مثل هذه العبارات كقولنا : « الثعابين التى طولها أكثر من ياردة » يظهر الحكم واضحا جدا ، لأنه يرجع هنا صراحة إلى موضوع متغير، ولا ينسب إلى أى موضوع معين. وعلى ذلك إذا كانت ع علاقةً ثابتة و ا حداً ثابتاً ، كانت . . . ع ا حكما معينا تماما (وضعنا نقطا قبل ع إشارةً إلى المكان الذى يجب أن يوضع فيه الموضوع حتى تتم القضية) . وقد يشك فى أمر القضية العلاقية أيمكن اعتبارها حكماً تختص بالمتعلق . وعندى أن هذا ممكن ما عدا فى حالة القضايا الحملية ، ومع ذلك فيحسن تأجيل هذه المسألة إلى أن نناقش العلاقات [1] .

٨٢ — وثمة مسائل أكثر صعوبة يجب أن ننظر الآن فيها . هل مثل هذه القضية : « سقراط إنسان فسقراط فان » أو « سقراط له زوجة فسقراط له أبٌ » حكم يقال على سقراط أو لا ؟ مما لا شك فيه أننا إذا استبدلنا متغيراً بسقراط لحصلنا على دالة قضية . الواقع أن صدق هذه الدالة لجميع قيم المتغير

---

(١) انظر بند ٩٦ .

هو الحكم فى اللزوم الصورى المناظر الذى لا يقرر كما يظن لأول وهلة علاقة بين دالتى قضيتين . وقد كان غرضنا إذا أمكن تفسير دوال القضايا بواسطة الأحكام ، ومن أجل ذلك إذا استطعنا تحقيق هذا الغرض فيجب أن تكون القضايا السالفة الذكر أحكاماً تختص بسقراط . ومع ذلك فثمة صعوبة كبيرة جدا فى اعتبارها كذلك . فنحن نحصل على الحكم من القضية بمجرد حذف أحد حدودها . ولكننا حين نحذف سقراط نحصل على « . . . إنسان ف . . . فان » . فى هذه الصيغة من الضرورى حين نعيد القضية أن يحل نفس الحد فى الموضوعين اللذين تشير النقط فيهما إلى ضرورة الحد . ولا يهم أى حد نختاره ولكن يجب أن يكون متطابقا فى الموضوعين . ومع ذلك فلا أثر يظهر لهذا الطلب الضرورى فى الحكم الذى يجب أن يكون ، ولا أثر يمكن أن يظهر ما دام كل ذكر للحد الذى سنضعه فهو بالضرورة محذوف . حين نضع س لتحل محل المتغير ، فإن الحد الذى سندخله يتعين بتكرار الحرف س ، ولكن فى الصورة الحكمية لا يمكن الحصول على مثل هذه الطريقة . ومع ذلك فقد يبدو لأول وهلة من العسير إنكار أن القضية المذكورة تخبرنا واقعا « عن » سقراط ، وأن نفس الواقع صادق عن أفلاطون ، أو مربى البرقوق ، أو العدد ٢ . مما لا ريب فيه أننا لا نستطيع إنكار أن : « أفلاطون إنسان فأفلاطون فان » هى من وجه أو من آخر نفس دالة أفلاطون ، كالحال فى القضية السابقة عن سقراط . والتأويل الطبيعى لهذه العبارة هو أن لإحدى القضيتين مع أفلاطون نفس العلاقة التى للأخرى مع سقراط . ولكن هذا التأويل يحتاج إلى أننا لا بد أن نعتبر الدالة المذكورة للقضية معرفة بواسطة علاقتها بالمتغير . ومع ذلك فإن مثل هذه النظرة تحتاج إلى دالة قضية أكثر تعقيداً من تلك التى نبحث فيها . إذا مثلنا « س إنسان يلزم عنها أن س فان » بقولنا Φ س فإن النظرة المذكورة تذهب إلى أن Φ س هى الحد الذى له مع س العلاقة ع ، حيث تكون ع هى علاقة معينة . والتعبير الصورى لهذه النظرة هو كما يأتى :

لجميع قيم س ، ص « ص مطابقة φ س » تكافىء قولنا « ص له العلاقة ع مع س » . ومن الواضح أن هذا لا يصلح تفسيراً ما دام فيه من التعقيد أكثر مما يفسره . وقد يبدو من ذلك أنه لعل للقضايا صورةً معينة ثابتة تعبر عنها هذه الحقيقة ، وهى أنها حالات لدالة قضية معينة مع عدم إمكان تحليل القضايا إلى عامل ثابت وآخر متغير . وهذه وجهة نظر غريبة وصعبة ، لأن ثبات الصورة فى جميع الحالات الأخرى تُرد إلى ثبات العلاقات ، أما الثبات الداخل هنا فمفروض من قبل فى معنى ثبات العلاقة ، ولا يمكن من أجل ذلك تفسيره بالطريقة المألوفة .

وأظن أن النتيجة ذاتها تستخلص من حالة المتغيرين . وأبسط مثال لهذه الحالة هو س ع ص ، حيث تكون ع علاقة ثابتة ، و س و ص متغيران مستقلان . ويبدو من الواضح أننا بصدد دالة قضية لمتغيرين مستقلين ، فليس ثمة صعوبة فى إدراك معنى فصل جميع القضايا من صورة س ع ص . ويدخل هذا الفصل — أو على الأقل يدخل جميع أفراد الفصل الصادقة — فى معنى فصول المتعلقات بها والمتعلقات بالنسبة لـ ع ، وهذه الفصول نسلم بها دون تردد فى مثل هذه الألفاظ مثل : الآباء والأبناء ، السادة والعبيد ، الأزواج والزوجات ، وأمثلة أخرى لا حصر لها من الحياة اليومية ، وكذلك فى المعانى المنطقية مثل المقدمات والنتائج ، الأسباب والمسببات ، وما إلى ذلك . فجميع مثل هذه المعانى تقوم على فصل القضايا التى من طراز س ع ص حيث تكون ع ثابتة و س و ص متغيرين . ومع ذلك فمن الصعوبة بمكان اعتبار س ع ص قابلة للتحليل إلى حكم ع مختص بـ س و ص وذلك لسبب كاف فى ذاته هو أن هذه النظرة تهدم جهة العلاقة ، نعنى وجهتها من س إلى ص ، تاركة إيانا مع ضرب من الحكم متماثل بالنسبة إلى س و ص ، مثل : « العلاقة ع تقوم بين س و ص » . الواقع أنه متى عُلِمت علاقة وعلم حداها فثمة قضيتان ممكنتان متميزتان . فإذا أخذنا ع نفسها حكما ، فإنها تصبح حكماً مبهما :

فعند وضع الحدين يجب إذا شئنا تجنب الإبهام أن نقرر ما الحد المتعلق به وما الحد المتعلق . قد يحق لنا اعتبار . . . ع ص حكما كما شرحنا من قبل ، غير أن ص هنا قد أصبح ثابتا . وقد نمضى بعد ذلك فى تغيير ص معتبرين فصل الأحكام . . . ع ص لقيم مختلفة لـ ص ، ولكن هذه العملية لا تبدو متطابقة مع تلك التى يشير إليها التغير المستقل لـ س ، ص فى دالة القضية س ع ص . وفضلا عن ذلك فإن العملية المقترحة تحتاج إلى تغيير عنصر فى الحكم، هذا العنصر هو ص فى . . . ع ص ، وهذا المعنى هو فى نفسه معنى جديد وصعب .

ويتصل بهذا الصدد نقطة غريبة جوهرية فى الأغلب فى الرياضة الفعلية ، وهى نقطة تنشأ من اعتبار علاقة الحد بنفسه . ولتكن دالة القضية س ع س التى فيها ع عبارة عن علاقة ثابتة ، فإن مثل هذه الدوال نحتاج إليها عند النظر فى مثل هذه الأمثلة : فصل المنتحرين ، أو العصاميين . أو كذلك عند النظر فى قيم المتغير الذى يكون مساويا لدالة معينة لنفسه ، وهذه كثيراً ما تكون ضرورية فى الرياضة العادية . وفى هذه الحالة يبدو من الواضح إلى أقصى حد أن القضية تشتمل على عنصر يفقد حين يحلل إلى حد هو س وحكم هو ع . وهنا نعود ثانيةً إلى ضرورة قبول دالة القضية على أنها أساسية .

٨٣ — وهناك نقطة صعبة تنشأ من تغير الصور فى قضية مّا . وليكن مثلا جميع القضايا من الصنف ا ع ب حيث يكون ا ، ب حدين ثابتين ، وتكون ع علاقة متغيرة ، فلا يظهر هناك أى سبب للشك فى أن فصل التصور « العلاقة بين ا ، ب » مشروع ، ولا سبب للشك فى وجود فصل مناظر ، ولكن هذا يحتاج إلى قبول دوال القضايا من مثل ا ع ب ، والتى هى فضلا عن ذلك كثيراً ما يُحتاج إليها فى الرياضة الفعلية ، كالحال مثلا فى حساب عدد علاقات كثير بواحد ، والتى تكون متعلقاتها والمتعلقات بها فصولا معينة . ولكن إذا كان لا بد للمتغير أن يكون ذا مجال غير مقيد ، كما نحتاج عادة ،

فمن الضرورى التعويض بدالة القضية « ع علاقة يلزم عنها ا ع ب » . فنى هذه القضية نجد أن اللزوم الحاصل مادى وليس صوريا . ولو كان اللزوم صوريا فلن تكون القضية دالة ع بل تكون مكافئة للقضية (الكاذبة بالضرورة) وهى : « جميع العلاقات تصل بين ا ، ب » . وبوجه عام نتعرض للبحث فى بعض القضايا مثل « ا ع ب يلزم عنها ع بشرط أن تكون ع علاقة » ، ونرغب فى تحويل هذه القضية إلى لزوم صورى. فإذا كانت Φ (ع) قضية لجميع قيم ع، فإن غرضنا يتحقق بوضع « إذا كانت ع علاقة ، يلزم عنها ا ع ب، إذن Φ (ع) » . فهنا ع يمكن أن تأخذ جميع القيم[1] ، و« إذا » و« إذن» لزوم صورى، أمَّا ما يلزم عنهما فلزوم مادى. وإذا لم تكن Φ (ع) دالة قضية، بل قضية فقط عندما تحقق ع دالة Ψ (ع)، حيث تكون Ψ (ع) قضية لازمة عن « ع علاقة » لجميع قيم ع ، فإن لزومنا الصورى يمكن أن يوضع فى هذه الصيغة : « إذا كانت ع علاقة يلزم عنها ا ع ب ، إذن لجميع قيم ع ، Ψ (ع) يلزم عنها Φ (ع) » ، حيث يكون كل من اللزومين الفرعيين ماديين. أما فيما يختص باللزوم المادى : « ع علاقة ، يلزم عنها ا ع ب » فهذه دائماً قضية ، على حين ا ع ب إنما تكون قضية حين تكون ع علاقة . ولن تصدق الدالة الجديدة للقضية إلا عندما تكون ع علاقة تصل بين ا و ب . أما إذا لم تكن ع علاقةً ، فالمقدم كاذب ، والتالى ليس قضية ، وبناءً على ذلك يكون اللزوم كاذبا . وعندما تكون ع علاقة لا تصل بين ا و ب ، فالمقدم صادق، والتالى كاذب ، وبناءً على ذلك يكون اللزوم أيضاً كاذباً . وإنما يكون اللزوم صادقاً حين يكون المقدم والتالى صادقين معاً . وهكذا عندما نعرف فصل العلاقات التى تصل بين ا و ب فالطريق الصحيح صوريا هو تعريفها باعتبار أنها القيم التى تحقق « ع علاقة يلزم عنها ا ع ب » — وهو لزوم مع أنه يشتمل على متغير إلا أنه ليس صوريا بل ماديا ، من جهة أنه

(١) يجب وضع معنى آخر (خلاف القضية) لقولنا ا ع ب إذا لم تكن ع علاقة .

لا يتحقق إلا ببعض قيم ع الممكنة . وفى اصطلاح « بيانو » المتغير ع فى هذه القضية حقيقى وليس ظاهريا .

والمبدأ العام المستعمل هو : إذا كانت Φ س إنما هى قضية فقط لبعض قيم س، إذن « " Φ س يلزم عنها Φ س " يلزم عنها Φ س » قضية لجميع قيم س ، وتكون صادقة ، وصادقة فقط ، حين تكون Φ س صادقة . (كلا اللزومين المستعملين ماديان) . وفى بعض الحالات تكون « Φ س يلزم عنها Φ س» مكافئة لدالة قضية أبسط س (مثل « ع علاقة » فى المثال المذكور) والتى تحل عندئذ محلها [1] .

ودالة القضية مثل « ع علاقة يلزم عنها ا ع ب » تبدو أقل قبولا للتحليل من أمثلة سابقة إلى ع وحكم يدور على ع ، ما دام يجب علينا أن نعين معنى لـ « ا . . ب » حيث يمكن ملء الفراغ بين الحدين بأى شىء ، وليس من الضرورى أن يكون علاقة . ومع ذلك فهاهنا إيحاء بشىء لم نبحثه بعد ، وهو الرابطة ذات الجهة . وقد يُشك فى وجود مثل هذا الشىء على الإطلاق ، إلا أنه يبدو أن هذه العبارات مثل : « ع علاقة تصل من ا إلى ب » تبين أن استبعادها يؤدى إلى متناقضات . ومع ذلك فهذا الأمر يتعلق بنظرية العلاقات التى سنعود إلى بحثها فى الباب التاسع (بند ٩٨) .

يظهر مما سبق قوله أن دوال القضايا يجب قبولها كحقائق أولية مطلقة . ويترتب على ذلك أن اللزوم الصورى ، واستغراق الفصول ، لا يمكن بوجه عام تفسيرهما بطريق علاقة تقوم بين أحكام ، ولو أنه حيث تنسب دالة قضية علاقةً ثابتة إلى حد ثابت ، فإن التحليل إلى موضوع وحكم تحليل مشروع ، ولكنه بلا أهمية .

---

(١) ولو أن دالة القضية لجميع قيم المتغير تكون صادقة أو كاذبة ، إلا أنها فى ذاتها ليست صادقة أو كاذبة ، من جهة أنها هى التى يدل عليها قولنا : أى قضية من الصنف المذكور ، وهذه نفسها ليست قضية .

٨٤ — وتبقى بضعة كلمات نذكرها عن اشتقاق الفصول من دوال القضايا . عندما نبحث فى هذه القضية مثل السينات من مثل Φ ص ، حيث تكون ب دالة قضية فإننا ندخل معنىً ليس له فى حساب القضايا إلا استعمالا طفيفا جدا — وأعنى بذلك معنى « الصدق » . فنحن نعتبر القضايا الصادقة من بين سائر القضايا من صنف Φ س ، حيث تعطى القيم المناظرة لـ س الفصل المعرف بالدالة φ س . وأظن أننا يجب أن نذهب إلى أن كل دالة قضية ليست صفراً فإنها تعرف فصلا يدل عليه قولنا : « السينات من مثل φ س » . وهكذا فهناك دائماً تصور الفصل ، أما فصل التصور المناظر فسيكون المفرد « س من مثل Φ س » . ولكن قد نشك — الواقع التناقض الذى أنهيت به الباب السابق يدعو إلى الشك — أيكون هناك دائما محمول معرف لمثل تلك الفصول . وبصرف النظر عن التناقض المذكور فلعل هذه النقطة تبدو لفظية بحتة ، إذ يمكننا القول إن « أن تكون س مثل φ س » قد تؤخذ دائما محمولا . ولكن فى ضوء ما ذكرناه من تناقض فيجب أن ننظر إلى جميع الملاحظات عن هذه المسألة بحذر ، وهى المسألة التى سنرجع إليها فى الباب العاشر .

٨٥ — وطبقاً لنظرية دوال القضايا التى دافعنا عنها هنا يجب ملاحظة أن φ س ليس شيئا منفصلا متميزا ، فهو يحيا فى القضايا من الصيغة φ س ، ولا يمكن أن تكون له حياة مع التحليل . وعندى شك عظيم فى أن مثل هذه النظرة لا تؤدى إلى تناقض ، ولكنها فيما يبدو مفروضة علينا ، ولها مزية تمكيننا من تجنب تناقض آخر ينشأ من النظرة المتقابلة . فإذا كان φ شيئا متميزا فلا بد أن يكون هناك قضية يحكم فيها Φ على نفسها ويمكن أن ندل على ذلك بقولنا : φ (Φ) ، كما توجد أيضاً هذه القضية لا φ (Φ) التى تساب φ (Φ) . وفى هذه القضية يمكن أن نعتبر Φ متغيرا فنحصل بذلك على دالة قضية . وهنا ينشأ هذا السؤال : أيمكن للحكم فى دالة القضية هذه أن يحكم به على ذاته ؟ ذلك أن الحكم هو لا حكمية الذات ، فإذا أمكن أن يرجع الحكم على ذاته فلا يمكنه

ذلك ، وإذا لم يمكنه ، فيمكنه ذلك . ويُتَجنب هذا التناقض بالاعتراف بأن الدالة من دالة القضية ليست شيئا مستقلا . ولما كان التناقض المذكور شديد الشبه بالتناقض الآخر الخاص بالمحمولات التى لا تُحمل على ذاتها ، فقد نرجو أن مثل هذا الحل سينطبق هناك أيضاً .

الباب الثامن

المتغير

٨٦ — لقد كشفت مناقشات الباب السابق عن الطبيعة الجوهرية للمتغير . ولا يوجد أى نظام من الأحكام يمكننا من الاستغناء عن النظر فى العنصر أو العناصر المتغيرة فى قضية ، على حين تظل العناصر الأخرى غير متغيرة . ولعل المتغير هو أكثر المعانى صلة واضحة بالرياضة ، كما أنه ولا شك أكثرها صعوبة على الفهم . ومحاولة هذا الفهم ، وقد يتحقق ، هى موضوع الباب الحاضر .

ويمكن إجمال النظرية الخاصة بطبيعة المتغير والنظرية المترتبة على مناقشاتنا السابقة فيما يأتى : عندما يوجد حد معين فى قضية كحد لها ، فإن هذا الحد يمكن استبدال أى حد آخر به ، على حين تظل الحدود الباقية بدون تغيير . وفصل القضايا التى نحصل عليها من ذلك ، لها ما يمكن أن نسميه ثبات الصورة ؛ ويجب أن يؤخذ هذا الثبات الصورى كفكرة أصلية . إن معنى فصل القضايا ذات الصورة الثابتة أساسى أكثر من المعنى العام للفصل ، لأن هذا الأخير يمكن تعريفه بحدود الأول ، وليس العكس . فلو أخذنا أى حد ، فإن أى قضية من فصل القضايا ذات الصورة الثابتة ستشتمل على ذلك الحد . وهكذا فإن سـ ، وهو المتغير ، هو الذى يدل عليه « أى حد » ، ثم ϕ سـ وهو دالة القضية هو ما تدل عليه القضية من صورة ϕ التى تحدث فيها سـ . ويمكن أن نقول إن سـ هو الـ سـ فى أى ϕ س حيث يدل ϕ سـ على فصل القضايا الناتجة من قيم مختلفة لـ سـ . وهكذا نرى أنه بالإضافة إلى دوال القضايا فإن معانى « أى » ومعانى الدلالة مفروضة من قبل فى معنى المتغير . وإنى أسلم أن هذه النظرية

مملوءة بالصعوبات ، ولكن الاعتراضات التى تقوم ضدها أقل مما كنت أتصوره. وسأعرضها الآن فى تفصيل أكثر .

٨٧ — ولنبدأ بملاحظة أن التصريح بأى ، وبعض ، وغير ذلك لا حاجة إلى حدوثه فى الرياضة ، لأن اللزوم الصورى سيعبر عن كل ما نحتاج إليه . ولنرجع إلى مثال سبق مناقشته عند الحديث عن الدلالة ، حيث ا فصل ، و ب فصل فصول . فكانت النتيجة :

« أى ا تنتمى لأى ب » تكافئ « س هى ا ، يلزم عنها أن ى هى ب يلزم عنها س هى ى » .

« أى ا تنتمى إلى ب » تكافئ » س هى ا يلزم عنها أن هناك حداً هو ب، وليكن ى من مثل س هى ى »[1] .

« أى ا ينتمى إلى بعض ب » تكافئ « هناك حد هو ب ، وليكن ى من مثل س هو ا يلزم عنها س هو ى » .

وهلمجرا فيما يختص بباقى العلاقات التى بحثناها فى الباب الخامس . وهنا ينشأ هذا السؤال : إلى أى حد تكون هذه المكافئات تعريفات لـ أى ، بعض ، أحد (a) ، وإلى أى حد تدخل هذه المعانى فى الرمزية ذاتها ؟

إن المتغير هو من وجهة النظر الصورية المعنى المميز للرياضة بوجه خاص . وفضلا عن ذلك فإن المنهج الخاص بتقرير نظريات عامة يدل دائماً على شىء مختلف عن القضايا من جهة مفهومها التى يحاول بعض المنطقيين مثل «برادلى» أن يردوها إليها . فأنْ يكون معنى الحكم على جميع الناس أو على أى إنسان مختلفاً عن معنى حكم مكافىء له يدور حول تصور « الإنسان » ، فهذه حقيقة يجب أن أعترف أنها تبدو لى بينة بذاتها — فهى بينة كقولنا إن القضايا التى تدور حول زيد ليست حول اسم زيد . لذلك لن أبرهن على هذه النقطة أكثر من

---

(١) هنا « هناك حد هو ح » حيث ح هو أى فصل يعرف على أنه مكافىء لقولنا « إذا كان د يستلزم د و " س هو ح " يستلزم د لجميع قيم س ، إذن د صادق » .

ذلك . وسنسلم بوجه عام أن المتغير هو الصفة المميزة للرياضة ، ولو أنه لا يرى بوجه عام حاضراً فى الحساب الابتدائى . فالحساب الابتدائى كما يعلم للأطفال يتميز بهذه الحقيقة وهو أن « الأعداد » الحاصلة فيه ثوابت، وجواب أى جمع لتلميذ مدرسة يحصل عليه بغير قضايا تتصل بأى عدد . ولكن واقع الحال هذا إنما يمكن أن يبرهن عليه بمساعدة قضايا حول أى عدد ، وبذلك ننتهى من حساب التلاميذ إلى الحساب الذى يستعمل الحروف محل الأعداد ، ويبرهن على النظريات العامة . ويمكن إدراك كم يختلف هذا الموضوع عن الحساب العالى من النظر فى مؤلفات أمثال « ديديكند » Dedekind ، و « شتولز » Stolz[1] . وينحصر الفرق بكل بساطة فيما يأتى : وهو أن أعدادنا أصبحت متغيرة بعد أن كانت ثوابت . فنحن الآن نبرهن على نظريات تتعلق بـ ۵ لا بـ ٣ أو ٤ أو أى عدد خاص . من أجل ذلك كان من الجوهرى تماماً لأى نظرية فى الرياضة أن تفهم طبيعة المتغير .

ولا شك أن المتغير كان يتصور فى الأصل ديناميكيا على أنه شىء تغير على مر الزمن ، أو كما يُقال على أنه شىء أخذ على التتابع جميع القيم لفصل معين . ولا نستطيع رفض هذه النظرة سريعاً . فإذا قام البرهان على نظرية تتعلق بـ ۵ فلا ينبغى أن تفرض أن ۵ ضربٌ من الحرباء تكون العدد ١ يوم السبت ، والعدد ٢ يوم الأحد وهكذا . ولا ينبغى أن نفرض كذلك أن ۵ تأخذ قيمها فى وقت واحد . فلو فرضنا أن ۵ ترمز إلى أى عدد صحيح ، فلا يمكننا القول بأن ۵ هى ١ ، ولا هى ٢ ، ولا هى أى عدد معين . الواقع ۵ تدل بالضبط على أى عدد ، وهذا شىء متميز تماماً عن كل عدد وعن جميع الأعداد . وليس من الصحيح أن ١ هو أى عدد ، ولو أنه من الصحيح أن ما ينطبق على أى عدد ينطبق على العدد ١ . صفوة القول يحتاج المتغير إلى المعنى الذى لا يمكن تعريفه عن أى، والذى شرحناه فى الباب الخامس .

---

(١) ما الأعداد ، وما ليس بالأعداد ؟ برنشفيك ١٨٩٣ .

٨٨ — وقد نميز ما يمكن أن نسميه المتغير الصحيح أو الصورى من المتغير المقيد . « أى حد » فهو تصور يدل على المتغير الصحيح . فإذا كان ى فصلا لا يشتمل على جميع الحدود فإن أى ى يدل على متغير مقيد . والحدود الداخلة فى الشيء الذى يدل عليه التصور المعرَّف تسمى قيم المتغير : وبذلك تكون كل قيمة لمتغير هى ثابت . وثمة صعوبة خاصة بهذه القضايا من مثل « أى عدد فهو عدد » . ولو فسرت هذه القضايا باللزوم الصورى فلا صعوبة فيها ، لأنها إنما تقرر أن دالة القضية « س عدد يلزم عنه أن س عدد » تصلح لجميع قيم س . أما إذا أخذ « أى عدد » على أنه شيء معين فمن الواضح أنه ليس مطابقا لـ ١ أو ٢ أو ٣ أو أى عدد يذكر . ومع ذلك فهذه هى جميع الأعداد الموجودة بحيث لا يمكن أن يكون « أى عدد » عدداً على الإطلاق . الواقع أن التصور « أى عدد » يدل بالفعل على عدد واحد ، ولكن ليس عدداً معيناً بالذات . وهذه بالضبط هى النقطة المميزة لـ « أى » ، وأنها تدل على حد فى فصل ، ولكن طريقة توزيعه محايدة دون إيثار حد على آخر . وعلى ذلك فمع أن س عدد ، ولا عدد بالذات هو س ، فلا يوجد ها هنا تناقض ما دمنا نعترف أن س ليس حداً معينا .

ويمكن تجنب معنى المتغير المقيد ، ما عدا بالنسبة لدوال القضايا . وتجنب ذلك بعرض نظرية مناسبة ونعنى بها النظرية المعبرة عن التقييد نفسه . ولكن بالنسبة لدوال القضايا هذا غير ممكن . ذلك أن س فى (س) ، دالة قضية ، هو متغير غير مقيد ، ولكن الدالة Φ س مقيدة بالفصل الذى يمكن أن نسميه Φ . (وعلينا أن نتذكر أن الفصل هنا أساسى ، حيث أننا رأينا أنه من المستحيل بغير دور الكشف عن أى ميزة عامة يمكن بها تعريف الفصل ، ما دام تقرير أى مزية عامة هو نفسه دالة قضية) . وعندما نجعل س متغيراً غير مقيد دائما ، فقد يمكننا أن نتكلم عن المتغير الذى يكون مطابقاً تصورياً فى المنطق والحساب والهندسة وسائر الموضوعات الأخرى الصورية .

والحدود التى تبحث هى دائماً جميع الحدود ، والتصورات المعقدة فقط إذا حدثت فإنها تميز فروع الرياضة المختلفة .

٨٩ — ونستطيع الآن أن نعود إلى بحث إمكان التعريف الظاهر لـ « أى » ، و «بعض» ، و «أحد» ، فى عبارات اللزوم الصورى. وليكن ا و ب فصلين تصورين ، ثم فلننظر فى هذه القضية « أى ا هو ب » . وتفسر هذه القضية بأن معناها : « س هو ا يلزم عنها س هو ب » . ولنبدأ بقولنا إنه من الواضح أن القضيتين لا يعنيان نفس الشىء ، لأن أى ا تصورٌ يدل فقط على الألفات ، على حين أنه فى اللزوم الصورى لا يلزم أن يكون س ألفاً . ولكننا فى الرياضة قد نستغنى بتاتا عن « أى ا هو ب » ونكتفى باللزوم الصورى . وهذا من الناحية الرمزية هو فى الواقع أفضل سبيل . فالسؤال الذى يجب علينا أن نفحصه هو : إلى أى حد ، إذا وجب ذلك أصلا ، تدخل أى ، وبعض ، وأحد فى اللزوم الصورى ؟ (أما أن أداة النكرة[١] تظهر فى « س هو أحد ا » و « س هو أحد ب » فليس لها شأن ، لأن هذه إنما أخذت كدوال قضايا نموذجية) . ولنبدأ بفصل من القضايا الصادقة كل منها يحكم على حد ثابت ، فلو كان الحد بفصل من القضايا الصادقة كل منها يحكم على حد ثابت ، بحيث إذا كان الحد أحد ا فهو أحد ب . ثم ننظر فى المتغير المقيد « أى قضية من هذا الفصل » . فنحن نحكم بصدق أى حد داخل ضمن قيم هذا المتغير المقيد . ولكن للحصول على الصيغة المقترحة فمن الضرورى نقل التغيير من القضية ككل إلى حدها المتغير ، وبهذه الطريقة نحصل على : « س أحد ا يلزم عنها س هو ب » ولكن هذا التوالد يبقى جوهريا لاننا لسنا ههنا بصدد التعبير عن علاقة بين دالتى قضيتين « س أحد ا » و « س أحد ب » ، ولو صرح بذلك لم نكن بحاجة إلى ذكر

(١) هنا اختلاف بين اللغة الإنجليزية واللغة العربية ، فنى الإنجليزية يوجد أداة نكرة وفى العربية لا تستعمل ، وقد وضعنا بدلا منها « أحد » فقولنا Soeratcs is a man تترجم كما يأتى « سقراط إنسان » وقد أشرنا إلى أمر فعل الكينونة من قبل ، أو الرابطة ، وههنا صعوبة أخرى هى ترجمة أداة النكرة التى لا يطابقها قولنا « أحد » . (المترجم)

نفس س في المرتين . وإنما تدخل دالة قضية واحدة هي بالذات الصيغة كلها . وكل قضية من الفصل تفيد علاقة حد واحد من دالة القضية « س أحد ا » بحد واحد من « س أحد ب » . وقد نقول إذا شئنا إن الصيغة كلها تفيد علاقة أي حد من « س أحد ا » بحد ما من « س أحد ب » . ولسنا نحصل على لزوم يشتمل على متغير بمقدار ما نحصل على لزوم متغير . أو قد نقول إن س الأول هو أي حد ، ولكن الثاني هو حد ما . وبالذات س الأول . فعندنا فصل من لوازم لا تشتمل على متغيرات ، وننظر في أي فرد من هذا الفصل . فلو كان أي فرد صادقاً ، فإننا نشير إلى هذه الحقيقة بإدخال لزوم نموذجي يشتمل على متغير . هذا اللزوم النموذجي هو ما يسمى باللزوم الصوري ، إنه أي فرد في فصل من اللزوم المادي. وهكذا يبدو أن «أي» مفروضة من قبل في الصورية الرياضية ، ولكن « بعض » و« أحد » قد يمكن بحق استبدالهما بما يكافئهما في عبارات من اللزوم الصوري .

٩٠ — ولو أن « بعض » يمكن استبدالها بما يكافئها في قولنا «أي» إلا أنه من الواضح أن هذا لا يعطينا معنى « بعض» . الواقع أن ثمة ضرباً من الثنائية بين «أي» و «بعض» . ولنفرض دالة قضية معينة ، فإذا كانت جميع الحدود المنتمية إلى دالة القضية محكوماً عليها ، فإننا نحصل على «أي» ، على حين أنه إذا كان حد واحد على الأقل هو المحكوم عليه (وهو ما يعطي ما يسمى بالنظرية الوجودية) فإننا نحصل على «بعض» . والقضية س محكوماً عليها بغير تعليق ، كما في قولنا « س إنسان يلزم عنها أن س فان » يجب أن تؤخذ على معنى أن س صادقة لجميع قيم س (أو لأي قيمة) ولكن قد يمكن أن تؤخذ على السواء لتدل على أن φ س صادقة لبعض قيمة س . ومن هذا الطريق يمكن أن نقيم حساباً ذا نوعين من المتغير ، المتواصل والمنفصل ، والمتغير في هذا النوع الأخير يحدث كلما كان ثمة نظرية وجودية يراد تقريرها . ولكن لا يبدو أن في هذه الطريقة أي مزية عملية .

٩١ — وتجب ملاحظة أن ما هو جوهرى ليس دوال القضايا المعينة ، بل فصل التصور الذى هو دالة القضية . ودالة القضية هى فصل جميع القضايا التى تنشأ من تغير حد مفرد ، ولا يجب اعتبار ما ذكرناه تعريفاً للأسباب التى شرحناها فى الباب السابق .

٩٢ — ويمكن اشتقاق جميع الفصول الأخرى من دوال القضايا وذلك بالتعريف مع استخدام معنى « مثل» . ولنفرض دالة قضية س ، فإن الحدود التى نشير إليها بمثل هى الفصل المعرَّف بـ φس ، حين يكون س مطابقاً لأى حد منها ، وتكون س صادقة . وهذا هو الفصل ككثير ، وهو الفصل من جهة الماصدق . ولا يجب أن نفترض من هذا أن كل فصل حصلنا عليه على هذا النحو فله محمول معرف ، وسنناقش هذا الموضوع من جديد فى الباب العاشر . ولكنى أظن أنه لا بد من افتراض أن الفصل من جهة الماصدق يعرف بأى دالة قضية ، وبوجه خاص أن جميع الحدود تكون فصلاً ما دامت عدة دوال قضايا (مثل جميع اللوازم الصورية تصدق على جميع الحدود . وهنا كما هى الحال فى اللزوم الصورى من الضرورى أن تبقى دالة القضية بأسرها والتى يعرف صدقها الفصل سليمة ، فلا تنقسم حتى حين يكون ذلك ممكنا لكل قيمة لـ س إلى دوال قضايا منفصلة . ومثال ذلك أنه إذا كان أ و ب فصلين معرفين بـ φس وΨس على الترتيب ، فإن جزأهما المشترك يعرف بحاصل φ س . Ψس ، حيث يجب أن يستخرج الحاصل لكل قيمة لـ س ، ثم تتغير س بعد ذلك . فإذا لم نفعل ذلك فليس من الضرورى أن نحصل على نفس س فى φ س وΨس . وهكذا فإننا لا نضرب دوال القضايا ، بل القضايا : ذلك أن الدالة الجديدة للقضية هى فصل الحواصل من القضايا المناظرة لها المنتمية للدوال السابقة ، وليست بأى حال حاصل φ س وΨس . وإنما كان الفصل للتعريف فى أن الحاصل المنطقى للفصول المعرَّفة بـ φ س وΨس هو الفصل المعرف بـ φ س ×Ψ س . وعندما نقرر قضية مشتملة على متغير ظاهر ، فالمحكوم به لجميع

قيم المتغير أو المتغيرات هو صدق دالة القضية المناظرة للقضية كلها ، ولا يكون أبداً علاقة دوال القضايا .

٩٣ – ويظهر من المناقشة السابقة أن المتغير شيء منطقي شديد التعقيد ليس بأي حال من السهل تحليله تحليلا صحيحا . ويبدو أن ما سأورده هو أقرب ما أستطيع أن أفعله من تحليل صحيح . ولنفرض أن قضية (لا دالة قضية) ، وليكن ا أحد حدودها ، ولنسم القضية φ (ا) . ثم بسبب الفكرة الأصلية لدالة القضية ، إذا كان س أي حد ، فيمكننا اعتبار القضية (س) وهي التي تنشأ من وضع س محل ا . ونصل بذلك إلى فصل بجميع القضايا φ (س) ، فإذا كانت كلها صادقة فإن φ (س) يمكن الحكم بها ببساطة فقد يمكن إذن أن يسمى صدق (س) صدقا صوريا. ومن ناحية اللزوم الصوري φ (س) تقرر لزوما لكل قيمة لـ س ، والحكم الناشيء من φ (س) هو حكم على فصل من اللوازم لا على لزوم واحد . وإذا كانت φ (س) صادقة بعض الأحيان ، فإن قيم س التي تجعلها صادقة تكون فصلا هو الفصل الذي تعرفه φ (س) : وفي هذه الحالة يقال إن الفصل موجود . أما إذا كانت φ(س) كاذبة لجميع قيم س ، فالفصل الذي تعرفه φ (س) يقال إنه غير موجود . والواقع كما رأينا في الباب السادس ، لا يوجد مثل هذا الفصل إذا أخذنا الفصول من ناحية الماصدق . وهكذا نرى أن س من بعض الوجوه هو الشيء الذي يدل عليه قولنا أي حد . ومع ذلك فلا يمكن التمسك بالدقة بهذا التفسير ، لأن متغيرات مختلفة قد تقع في قضية ومع ذلك يكون الشيء الذي يدل عليه أي حد فيما نفترض فريدا . وهذا يكشف لنا عن نقطة جديدة في نظرية الدلالة ، وهي أن أي حد لا يدل بمعنى الكلمة عن مجموعة من الحدود ، بل يدل على حد واحد ولكنه ليس معيناً مخصوصا . وهكذا فإن أي حد قد يدل على حدود مختلفة في مواضع مختلفة . فقد تقول : أي حد له علاقة مَّا بأي حد ، فتكون هذه قضية مختلفة كل الاختلاف عن قولنا : أي حد له علاقة مَّا بنفسه .

وهكذا فإن للمتغيرات ضرباً من التفرد الذى ينشأ كما حاولت أن أبين من دوال القضايا . فعندما يكون لدالة قضية متغيران ، فيجب اعتبارها قد حصلت على مراحل متتابعة . فإذا أردنا أن نحكم بدالة القضية Φ (س و ص) على جميع قيم س ، ص ، فيجب أن نعتبر الحكم فى دالة القضية (ا و ص) خاصا بجميع قيم ص ، حيث يكون ا ثابتا . ولا تدخل ص فى هذا ، ويمكن تمثيلها بقولناΨ (ا) . ثم نغير ا ، ونُثبت الحكم فى هذه القضية (س) بالنسبة لجميع قيم س . وهذه العملية شبيهة بالتكامل المزدوج ، ولا بد من أن نثبت صورياً أن الترتيب الذى يجرى عليه المتغيرات لا يحدث أى اختلاف فى النتيجة . وهذا فيما يظهر هو تفسير تفرد المتغيرات . فالمتغير ليس مجرد أى حد ، بل أى حد داخل فى دالة القضية . قد نقول : إذا كانت Φس دالة قضية فإن س هى الحد فى أى قضية فى فصل القضايا التى صورتها Φس . ومن هذا يظهر فيما يختص بدوال القضايا أن معانى الفصل، والدلالة ، و « أى» أساسية ، من جهة أنها مفروضة من قبل فى الرمزية المستعملة . وبهذه الخاتمة أرى أننى قد أشبعت القول بقدر طاقتى فى تحليل اللزوم الصورى الذى يعد مشكلة من المشكلات الرئيسية فى الجزء الأول . ولعل بعض القراء ينجح فى تحليلها إلى التمام ، فيجيب على الأسئلة الكثيرة التى اضطررت إلى إغفالها دون جواب .

الباب التاسع

العلاقات

٩٤ — يعقب البحث فى القضايا الحملية نوعان من القضايا يبدو أنهما يساويانها فى البساطة، وهما : القضايا التى يحكم فيها بعلاقة بين حدين ، والقضايا التى يقال إن حديها اثنان . وهذه القضايا الأخيرة سننظر فيها فيما بعد ، أما الأولى فلا بد من بحثها على الفور . كثيراً ما قيل إن كل قضية يمكن ردها إلى أحد أنواع القضايا الحملية ، غير أننا سنجد خلال هذا الكتاب كثيراً من الأسباب لرفض هذه الوجهة من النظر . ومع ذلك يمكن القول بأن جميع القضايا غير الحملية ، والتى لا تحكم على أعداد ، يمكن ردها إلى قضايا مشتملة على حدين وعلاقة . ومع أن رفض هذا الرأى أصعب إلا أنه أيضاً كما سنجد لا يستند إلى أسباب وجيهة[١] . قد نبيح القول إذن بأن ثمة علاقات بين أكثر من حدين ، ولكنها من حيث إنها أكثر تعقيداً فيحسن أن ننظر أولا فى تلك التى تصل بين حدين فقط .

العلاقة بين حدين هى تصورٌ يقع فى قضية ذات حدين لا يقعان كتصورين[٢] ، ويعطى تبادل الحدين فيها قضية مختلفة . ونحن فى حاجة إلى هذه الملاحظة الأخيرة للتمييز بين القضية العلاقية من صنف « ا و ب اثنان » وبين القضية المطابقة لها وهى « ب و ا اثنان » . والقضية العلاقية يمكن أن يرمز لها بقولنا ا ع ب ، حيث ع هى العلاقة ، وحيث ا و ب هما الحدان . وستدل ا ع ب دائما على قضية مختلفة عن ب ع ا ، بشرط ألا يكون ا و ب متطابقين . وهذا

---

(١) انظر فيما بعد الجزء الرابع ، الباب الخامس والعشرين ، بند ٢٠٠ .

(٢) هذا الوصف كما رأينا من قبل (بند ٤٨) يستبعد العلاقة الزائفة بين الموضوع والمحمول

يعنى أنه من خصائص العلاقة بين حدين أنها تسير ، إن صح هذا القول ، من حد إلى الآخر . وهذا هو الذى يمكن تسميته « جهة » Sense العلاقه ، وهو كما سنرى منبع الترتيب والتسلسل . ويجب أن نسلم كبديهية أن ا ع ب تستلزم قضية علاقية وتلزم عن قضية علاقية هى ب عَ ا وتسير فيها عَ من ب إلى ا ، وقد تكون هى نفس العلاقة مثل ع وقد لا تكون . ولكن حتى حين تستلزم ا ع ب ب ع ا وتلزم عنها ، فيجب أن يكون مفهوماً تماماً أن هاتين القضيتين مختلفتان . ويمكننا أن نميز الحد الذى تتجه العلاقة منه بأنه المتعلق به ، والحد الذى تتجه العلاقة إليه بأنه المتعلق . وجهة العلاقة معنى أساسى لا يقبل التعريف . والعلاقة التى تصل بين ب ، ا كلما كانت ع تصل بين ا ، ب سنسميها «عكس» ع ، وندل عليها (تبعا لشرودر Shroder) بالرمز عَ . وعلاقة عَ بـ ع هى علاقة التقابل ، أو اختلاف الجهة ، ولاينبغى تعريف هذه العلاقة (كما قد يبدو لأول وهلة صحيحاً) باللزوم المتبادل المذكور فى أى حالة فردية ، بل فقط من واقع أنها تصل فى جميع الحالات التى تقع فيها العلاقة المعطاة . وأسباب هذه الوجهة من النظر مستمدة من قضايا معينة تتعلق فيها الحدود بذاتها لا على التماثل ، أى بعلاقة ليس عكسها متطابقا معها . فلنمض الآن فى بحث هذه القضايا .

٩٥ ــ هناك شىء من الإغراء يدفعنا إلى القول بأن أى حد لا يمكن أن يتعلق بنفسه ، وهناك أيضاً إغراء أقوى من ذلك للقول بأنه حتى إذا أمكن أن يتعلق الحد بنفسه ، فيجب أن تكون العلاقة متماثلة ، أى متطابقة مع عكسها . فنقول أولا إنه إذا لم يكن هناك حد يتعلق بنفسه ، فلن نستطيع أبدا الحكم بالتطابق الذاتى ، ما دام هذا الأمر هو بكل بساطة علاقة . لكن ما دام هناك معنى كالتطابق ، وأنه لا نزاع فيما يظهر أن كل حد متطابق مع نفسه ، فيجب أن نسمح بالقول بأن الحد قد يتعلق بنفسه . ومع ذلك

فالتطابق لا يزال علاقة متماثلة ويمكن التسليم بها كذلك بغير طويل مشاحنة . ولكننا نقع فى مأزق أسوأ حين نسلم بالعلاقات غير المتماثلة للحدود مع نفسها . وعلى الرغم من ذلك فالقضايا الآتية يظهر أنها ليست موضع نزاع : الوجود موجود ، أو له وجود ؛ ١ هو واحد، أوله وحدة ؛ التصور هو تصورى؛ الحد هو حد ؛ فصل التصور هو فصل تصور ، وجميع هذه إحدى الأنواع الثلاثة المتكافئة التى ميزناها فى ابتداء الباب الخامس ، والتى يمكن تسميتها على على التوالى قضايا حملية ، وقضايا تقرر علاقة الحمل ، وقضايا تقرر دخول الفرد تحت الفصل . فالذى علينا أن نبحث فيه هو الواقع من أن المحمول قد يحمل على نفسه . ومن الضرورى لتوضيح غرضنا الراهن أن نأخذ قضايانا من الصورة الثانية (سقراط له إنسانية) ما دامت الصورة الحملية ليست على المعنى المذكور سابقاً علاقية . ويمكن أن نأخذ كنموذج لمثل هذه القضايا « الوحدة لها وحدة » . وهنا لا نزاع فى أننا لا ننكر أن علاقة الحمل غير متماثلة ما دامت الموضوعات لا يمكن بوجه عام أن تحمل على محمولاتها . وهكذا فإن « الوحدة لها وحدة » تقرر علاقة واحدة بين الوحدة ونفسها ، وتستلزم علاقة أخرى ، وهى عكس العلاقة : فالوحدة لها بالنسبة لنفسها كلا من العلاقة الموضوع بالمحمول ، وعلاقة المحمول بالموضوع . والآن إذا كان المتعلق به والمتعلق متطابقين ، فمن الواضح أن المتعلق له بالمتعلق به نفس العلاقة كتلك التى بين المتعلق به والمتعلق . ومن ثم إذا عُرِّفت عكس العلاقة فى حالة خاصة باللزوم المتبادل فى تلك الحالة الخاصة ، فقد يظهر فى الحالة الراهنة أن علاقتنا لها عكسان ما دامت هناك علاقتان مختلفتان تلزم عن المتعلق والمتعلق به فى هذه القضية : « الوحدة لها وحدة » . يجب إذن أن نعرف عكس العلاقة بالواقع من أن ا ع ب تستلزم وتلزم عن ب عَ ا ، مهما يكن ا و ب، إذا كانت علاقة ع تصل بينهما أو لا . ومعنى ذلك أن ا و ب هما هنا متغيران جوهريا ، وإذا أعطيناهما أى قيمة ثابتة ، فقد نجد أن ا ع ب تستلزم وتلزم عن ب عَ ا ،

حيث أن عَ هي علاقة منّا مختلفة عن ع .

من أجل ذلك لا بد من ملاحظة نقط ثلاث فيما يختص بالعلاقات بين الحدين : (١) أنها كلها لها جهة بحيث يمكننا التمييز بين ا ع ب ، وبين ب ع ا بشرط ألا يكون ا و ب متطابقين ؛ (٢) أنها كلها لها عكس ، أي علاقة عَ بحيث تكون ا ع ب تستلزم وتلزم عن ب عَ ا ، مهما يكن ا و ب ؛ (٣) بعض العلاقات تصل بين الحد نفسه ، وليس من الضروري أن تكون مثل هذه العلاقات متماثلة ، أي قد تكون هناك علاقتان مختلفتان كل منهما عكس الأخرى ، ويصل كل منهما بين الحد ونفسه .

٩٦ — فيما يختص بالنظرية العامة للعلاقات وبخاصة فى تطوراتها الرياضية ، هناك بعض البديهيات التى تربط بين الفصول والعلاقات على أهمية كبيرة . ليكن معلوماً أن اتصال علاقة معينة بحد معين فهذا الاتصال بالحد هو محمول . ولذلك فتكون جميع الحدود التى لها هذه العلاقة بهذا الحد فصلا . وليكن معلوما كذلك أن مجرد وجود علاقة فهو محمول ، ولذلك تكون جميع المتعلقات بها بالنسبة لعلاقة معينة فصلا ، ويترتب على ذلك من اعتبار عكس العلاقة أن جميع المتعلقات أيضا تكون فصلا . وسأسمى هذين الفصلين على التوالى ميدان وعكس ميدان العلاقة : وسأسمى المجموع المنطقى للاثنين مجال العلاقة .

ومع ذلك يبدو أن البديهية التى تقول بأن جميع المتعلقات بها بالإضافة إلى علاقة معنية تكوِّن فصلا ، تحتاج إلى بعض التحديد ، وذلك على أساس التناقض المذكور فى ختام الباب السادس . ويمكن تقرير هذا التناقض كما يأتى : فقد رأينا أنا بعض المحمولات يمكن حملها على ذاتها . فلننظر الآن فى التى لا تكون هذه حالتها . وهذه هى المتعلقات بها (وأيضا المتعلقات) التى تشبه علاقة معقدة ، وهى الجمع بين اللاحملية وبين التطابق . لكن ليس هناك محمول يتصل بها كلها ولا يتصل بأى حدود أخرى . لأن هذا المحمول سيكون إما محمولا على نفسه أو ليس كذلك . فإنْ كان محمولا على نفسه

فهو أحد تلك المتعلقات بها التى عرفت بالعلاقة ، فهو إذن ، بحكم تعريفها ، لا يقبل الحمل على نفسه . وبالعكس لم يقبل الحمل على نفسه ، فهو عندئذ أيضا أحد المتعلقات بها المذكورة التى (فرضا) يقبل جميعها الحمل ، فهو إذن يقبل الحمل على نفسه . وهذا تناقض يتبين منه أن جميع المتعلقات بها المذكورة ليس لها محمول مشترك مانع ، ولا تكوّن بناءً على ذلك فصلا ، إذا كانت المحمولات المعرفة ضرورية للفصول .

ويمكن أن نضع الأمر على نحو آخر . فعند تعريف الفصل المزعوم للمحمولات استنفدت جميع المحمولات التى تقبل الحمل على نفسها . ولا يمكن أن يكون المحمول المشترك بين جميع هذه المحمولات واحداً منها ، ما دام لكل منها يوجد على الأقل محمول واحد (وهو نفسه) لا يقبل الحمل . ولكننا نعود فنقول إن المحمول المشترك المفروض لا يمكن أن يكون أى محمول آخر ، إذ لو كان كذلك لقبل الحمل على نفسه ، ومعنى ذلك أنه يكون أحد أفراد فصل المحمولات المفروض ، ما دامت هذه المحمولات قد عرفت بأنها تلك التى تقبل الحمل . وهكذا لم يترك محمول يعم فى اتصاله جميع المحمولات المذكورة .

ويترتب على المناقشة السابقة أنه ليس كل مجموعة يمكن تعريفها من الحدود تكوّن فصلا يعرفه محمول مشترك . وينبغى أن نجعل هذه الحقيقة فى بالنا ، وأن نحاول الكشف عن الخواص التى يجب أن تكون للمجموعة حتى تكون مثل هذا الفصل . ويمكن بيان النقطة المقررة فى التناقض المذكور كما يأتى : القضية التى إنما تشتمل فى الظاهر على متغير واحد قد لا تكون مكافئة لأى قضية يكون الحكم فيها بأن المتغير المذكور له محمول معين . ويبقى السؤال بعد ذلك موضع بحث هل يجب على كل فصل أن يكون له محمول معرف .

أما أن تكون جميع الحدود التى لها علاقة معينة بحد معين فصلا معرفا

بمحمول مشترك مانع فهذا نتيجة المذهب الذى بسطناه فى الباب السابع ، وبينا فيه أن القضية ا ع ب يمكن تحليلها إلى الموضوع ا وإلى الحكم ع ب . فأن يكون الحد ع ب مما يمكن الحكم به فيظهر ببساطة أنه محمول . ولكن لا يترتب على ذلك فيما أظن أن يكون الحد ع ، لبعض قيمة ص ، مما يمكن الحكم به ، ومع ذلك فإن مذهب دوال القضايا يتطلب أن تكون جميع الحدود التى لها الخاصة الأخيرة فصلا . وسأسمى هذا الفصل ميدان العلاقة ع وكذلك فصل المتعلقات بها . وسنسمى أيضا ميدان عكس العلاقة عكس الميدان ، وكذلك فصل المتعلقات . وسنسمى مجموع الميدانين مجال العلاقة — وهى فكرة ذات أهمية خاصة بالنسبة للتسلسل . وهكذا إذا كانت الأبوة هى العلاقة ، فالآباء يكونون ميدانها ، والأبناء عكس ميدانها ، والآباء والأبناء معاً مجالها .

وقد يُشك فيما إذا كانت القضية ا ع ب يمكن أن يُعتبر فيها ا ع محكوما عليه من ب ، أو الذى يحكم على ب هو فقط عَ ا . وبعبارة أخرى هل القضية العلاقية إنما هى حكم متصل بالمتعلق به ، أو أنها أيضا حكم متصل بالمتعلق ؟ ولو أخذنا الوجهة الأخيرة من النظر فسنحصل من هذه القضية مثلا « ا أكبر من ب » على أربعة أحكام، هى : « أكبر من ب » و« ا أكبر من » و « أصغر من ا » و « ب أصغر من » . وأنا شخصيا أميل إلى الأخذ بهذه النظرة ، ولكنى لا أعرف ما هى حجج كلا الجانبين .

٩٧ — ويمكن أن نكوِّن المجموع والحاصل المنطقى لعلاقتين أو لفصل من العلاقات تماماً كما نفعل فى حالة الفصول ، فيما عدا أننا هنا بصدد تغير مزدوج . وبالإضافة إلى هذه الطرق من الجمع فعندنا أيضا حاصل الضرب النسبى ، والذى على العموم لا يقبل التعويض فيحتاج بناءً على ذلك إلى أن يكون عدد العوامل محدوداً . فلو كانت ع ، ح علاقتين ، فالقول بأن حاصل ضربهما النسبى ع ح يصل بين حدين هما س ، ه يعنى القول بأن هناك حداً هو ص له مع س العلاقة ع ، وله نفسه العلاقة ح مع ه . مثال ذلك

العديل هو حاصل الضرب النسبى من الزوجة والأخ أو الأخت والزوج. والصهر هو حاصل الضرب النسبى من الزوجة والأب ، على حين أن الحاصل النسبى من الأب والزوجة هو الأم أو زوجة الأب.

٩٨ — وهناك ما يغرى باعتبار العلاقة المعرفة بالماصدق أنها فصل من الروابط Couples . ولهذا الأمر مزية صورية هى تجنب الضرورة التى تخضع لها القضية الأولية حين تقرر بأن كل رابطة فلها علاقة لا تصل بين زوج آخر من الحدود. ولكن من الضرورى أن نعطى للرابطة جهةً حتى نميز بين المتعلق به والمتعلق : وهكذا تصبح الرابطة متميزة جوهريا من الفصل المكون من حدين ، ويجب قبولها كفكرة أولية . وقد يبدو حين ننظر للأمر فلسفيا أن الجهة لا يمكن أن تشتق إلا من قضية علاقية مَّا ، وأن الحكم بأن ا متعلق به و ب متعلق يقتضى من قبل قضية علاقية بحتة فيها ا ، ب حدان ، على الرغم من أن العلاقة المحكوم بها إنما هى العلاقة العامة بين المتعلق به والمتعلق . الواقع توجد تصورات مثل «أكبر» التى تحصل لا كحد فى القضايا ذات الحدين (بند ٤٨ ، ٥٤) ، ولا يمكن لأى مذهب خاص بالروابط تجنب مثل هذه القضايا . يبدو إذن من الأصوب اتخاذ وجهة نظر المفهوم عند بحث العلاقات ، وأن يكون الأوْلى مطابقتها بفصول التصورات لا بالفصول . وهذا الإجراء يريحنا أكثر من الناحية الصورية ، ويبدو أنه أقرب إلى الحقائق المنطقية . وتشمل الرياضة نفس العلاقة الغريبة بنظرتيها المفهومية والماصدقية : فالرموز لا الحدود المتغيرة (أى فصل التصورات المتغيرة والعلاقات) تحل محل المفهومات ، على حين أن الأشياء الفعلية التى نبحث فيها هى دائما الماصدقات . وهكذا فإنه فى حساب العلاقات فصول الروابط هى التى تهمنا ، ولكن الرموز تبحث فيها بطريق العلاقات . وهذا بالضبط شبيه بالأحوال التى شرحناها بخصوص الفصول ، وليس من الضرورى فيما يظهر تكرار الشرح فى إطناب .

٩٩ — وقد أقام برادلى فى الفصل الثالث من كتابه « الظاهر والحقيقة »

حجة ضد حقيقة العلاقات مستندا إلى التراجع اللانهائى الناشىء من أن العلاقة التى تصل بين حدين يجب أن تتعلق بكل منهما . والتراجع اللانهائى لا نزاع فيه إذا أخذنا القضايا العلاقية على أنها نهائية ، ولكن مما يشك فيه كثيراً أنها تخلق أى صعوبة منطقية . وقد سبق لنا (بند ٥٥) أن ميزنا بين نوعين من التراجع ، الأول يتجه فقط نحو قضايا لزومية جديدة على الدوام ، والثانى تراجع فى معنى القضية نفسها . واتفقنا على أن الأول من هذين النوعين لم يعد عليه اعتراض منذ حل مشكلة اللانهايةا ، على حين أن النوع الثانى لا يزال غير مقبول . وعلينا الآن أن نبحث أى هذين النوعين من التراجع يحصل فى المثال الحاضر . وقد نزعم أن العلاقة موضع البحث من حيث إنها جزء من نفس معنى القضية العلاقية فيجب أن يكون لها بالحدين العلاقة المعبر عنها بقولنا إنها تربطهما ، وهذا هو الذى يحقق التمييز الذى سبق أن تركناه بغير تفسير (بند ٥٤) بين علاقة تتعلق وعلاقة فى ذاتها . ومع ذلك فقد نزعم فى الاحتجاج ضد هذه النظرة أن الحكم بعلاقة بين العلاقة والحدين ليس جزءاً من القضية الأصلية ولو أن ذلك يلزم عنها ، وأن العلاقة التى تتعلق تتميز عن العلاقة فى ذاتها بعنصر الحكم غير القابل للتعريف الذى يميز بين القضية وبين التصور . وقد يقال فى الرد على ذلك أن فى هذا التصور « الفرق بين ا ، ب » الفرق يعلق ا بـ ب ، كما لو كنا نقول فى القضية « ا و ب يختلفان » . ولكن قد نرجع فنضيف إلى ذلك أننا قد وجدنا الفرق بين ا ، ب غير متميز عن مجرد الفرق ، ما عدا إذا كان ثمة نقطة معينة للفرق . وهكذا يبدو مستحيلا إثبات أن التراجع اللانهائى المذكور من النوع المعترض عليه . وأظن أننا يمكن التمييز بين « ا تفوق ب » وبين « ا (هو) أكبر من ب »[1] ولو أنه من المحال إنكار أن الناس تعنى عادة نفس الشىء من هاتيين القضيتين . وعلى الأساس الذى

---

(١) فى الأصل « a is greater than b » ، وقد جرينا على ترجمتها « ا أكبر من ب » ولكن المؤلف سيعتبر فيما بعد ان is, than حدان ، فاقتضت الترجمة ترجمة الرابطة هو (المترجم)

لا مهرب لنا منه من أن كل لفظ أصلى يجب أن يكون له معنى ما، فإن «هو» و« من » يجب أن يكونا جزءاً من قولنا « ا (هو) أكبر من ب » فتشتمل بذلك على أكثر من حدين وعلاقة . ويبدو أن « هو» تقرر أن ا له مع «أكبر» العلاقة بالمتعلق به ، على حين أن «من» تقرر بالتشابه أن ب له مع أكبر العلاقة بالمتعلق . ولكن « ا تفوق ب » قد يقال إنها تعبر فقط عن العلاقة بين ا ، ب دون أن تشتمل على أى لزوم آخر من العلاقات . من أجل ذلك لا بد لنا من أن نختم البحث بقولنا إن القضية العلاقية ا ع ب لا تشتمل فى معناها على أى علاقة بين ا أو ب وبين ع ، وأن التراجع اللانهائى ولو أنه لا نزاع فيه إلا أنه لا ضرر منه منطقيا . وبهذه الملاحظات يمكن أن نرجئ الكلام عن بقية نظرية العلاقات إلى الأجزاء المقبلة من هذا الكتاب .

الباب العاشر

التناقض

١٠٠ — من الضرورى قبل أن ننفض أيدينا من المسائل الأساسية أن نفحص أكثر تفصيلا عن التناقض الغريب ، والذى ذكرناه من قبل ، بالنسبة للمحمولات التى لا تقبل الحمل على ذاتها . ويحسن قبل محاولة حل هذا اللغز أن نستنتج بعض الاستباطات المتصلة ، وأن نقررها فى أشكال مختلفة . وأذكر بهذه المناسبة أن الذى قادنى إليها محاولة التوفيق بين برهان «كانتور» من عدم إمكان وجود أكبر عد أصلى ، وبين الفرض المقبول من أن فصل جميع الحدود (الذى رأينا أنه جوهرى لجميع القضايا الصورية) له بالضرورة أكبر عدد ممكن من الأفراد[1] .

ليكن ه فصل التصور الذى يمكن أن يحكم به على نفسه ، مثل « ه هو ه » والحالات هى فصل التصور ، وسلوب فصول التصورات العادية مثل لا إنسان (ا) فإذا كان ه داخلا تحت فصل آخر هو ى ، فإنه ما دام ه هو ه ، فإن ه هو ى ؛ ويترتب على ذلك أن هناك حداً من حدود ى هو فصل تصور يمكن أن يحكم به على نفسه . ثم بنقل الوضع (ب) إذا كان ل فصل تصور ليس أفراده فصول تصورات يمكن أن يحكم بها على نفسها ، فلا فصل تصور داخل تحت ل يمكن أن يحكم به على نفسه . ثم بعد ذلك (ح) إذا كان ل أى فصل تصور كان ، و لَ فصل التصور لأفراد ل التى لا تقبل الحمل على نفسها ، ففصل التصور هذا مشتمل على نفسه ، ولا أحد من أفراده يقبل الحمل على نفسه . ويترتب على ذلك من (ب) أن لَ لا يقبل الحمل على

---

(١) انظر الجزء الخامس ، الباب الثالث والأربعين ، بند ٣٤٤ وما بعدها .

نفسه . وبناء على ذلك لَ ليس أحد لَ ، فليس إذن أحد ل ؛ لأن حدود ل التى ليست حدود لَ هى كلها مما تقبل الحمل على نفسها ، أما لَ فلا . ويترتب على ذلك (د) أنه إذا كان ل أى فصل تصور كان فهناك فصل تصور داخل تحت ل وليس فرداً منه ، وهو أيضاً أحد فصول التصورات التى تقبل الحمل على نفسها . وإلى ها هنا يبدو أن استنباطاتنا ليست موضع سؤال . ولكن لنأخذ الآن آخر استنباط منها ، ولنسلم بالفصل من تلك الفصول من التصورات التى لا يمكن أن يحكم بها على نفسها ، فسنجد أن هذا الفصل لا بد أن يشتمل على فصل تصور ليس حدا لنفسه ومع ذلك لا يدخل تحت الفصل المذكور .

وقد نلاحظ أيضا أنه بفضل ما أثبتناه فى (ب) فإن فصل فصول التصورات التى لا يمكن أن يحكم بها على نفسها ، والتى سنسميها هـ ، يشتمل كحدود داخلة تحتها جميع فصولها الفرعية ، ولو أنه من السهل إثبات أن كل فصل له من الفصول الفرعية أكثر مما له من الحدود . ثم إذا كان ص أى حد من حدود هـ ، وكان هـَ هو جميع هـ ما عدا ص ، إذن هـَ باعتباره فصلا فرعيا من الفصل هـ ، ليس أحد هـَ بل أحد هـ ، إذن هو ص . وبناء على ذلك فكل فصل تصور هو أحد حدود هـ فله سائر حدود هـ كما صدقاته ، ويترتب على ذلك أن التصور «دراجة» هو « ملعقة » ، و « الملعقة » هى « الدراجة » . ومن الواضح أن هذا محال ، ويمكن إثبات أى عدد من هذه الحالات المماثلة .

١٠١ ـ فلنترك هذه النتائج المتناقضة ، ولنحاول وضع التناقض نفسه فى عبارة مضبوطة . وقد سبق وضع هذه العبارة بدلالة المحمولات . فلو كان س محمولا ، فإن س قد يقبل الحمل على نفسه وقد لا يقبل . ولنسلم بأن « ما لا يقبل الحمل على نفسه » هو محمول . ويترتب على ذلك أن الفرض بأن هذا المحمول إما أن يقبل الحمل على نفسه أو لا يقبل فهو خلف . والنتيجة فى هذه الحالة تبدو واضحة وهى : « لا يقبل الحمل على نفسه » ليس محمولا .

ولنبسط الآن التناقض نفسه فى صيغة فصول التصورات . إن فصل التصور قد يكون وقد لا يكون أحد حدود ما صدقاته . إن قولنا : « فصل تصور ليس أحد حدود ما صدقاته » يظهر أنه فصل تصور . ولكن إذا كان أحد حدود ما صدقاته ، فهو فصل تصور ليس حدا من حدود ما صدقاته ، والعكس بالعكس . وهكذا يجب أن نستنتج خلافا للظواهر أن « فصل التصور الذى ليس أحد حدود ماصدقاته » ليس فصل تصور .

وبالنظر إلى حدود الفصول يبدو التناقض أكثر عجبا . فالفصل كواحد قد يكون حدا لنفسه ككثير . وهكذا فإن فصل جميع الفصول فصل* ؛ وفصل جميع الحدود التى ليست ناساً ، ليس إنسانا ، وهكذا . هل جميع الفصول التى لها هذه الخاصة تكون فصلا ؟ إذا كان الأمر كذلك ، فهل هو كفصل هو حد لنفسه ككثير أو لا ؟ فإذا كان كذلك ، فهو واحد من الفصول التى كواحدات ليست حدودا لنفسها ككثير ، والعكس بالعكس . وهكذا يجب أن نستنتج مرة أخرى أن الفصول التى هى كواحدات ليست حدودا لأنفسها ككثير لا تكون فصلا — أو فلنقل إنها لا تكون فصلا كواحد ، لأن الحجة لا يمكن أن تبين أنها لا تكون فصلا ككثير .

١٠٢ — ويمكن إثبات نتيجة شبيهة بذلك خاصة بأى علاقة ، دون أن تؤدى مع ذلك إلى تناقض . ولتكن ع علاقة ، ولنعتبر الفصل ﻫ مشتملا على الحدود التى ليس لها علاقة ع بنفسها ، فيكون من المستحيل وجود أى حد هو ا ولها جميعا دون غيرها علاقة ع . إذ لو كان هناك مثل هذا الحد ، فإن دالة القضية « س ليس له العلاقة ع مع س » تكون مكافئة لقولنا : « س له العلاقة ع مع ا » . فإذا وضعنا ا محل س فى جميع الأحوال ، وهذا شىء مشروع ما دام التكافؤ صوريا ، لوجدنا تناقضا . وحين نضع محل ع الرمز ε ، وهو علاقة الحد بفصل التصور الذى يمكن أن يحكم به عليه ، فإننا نحصل على التناقض المذكور . والسبب فى ظهور التناقض هنا هو أننا أخذنا كبديهية أن

أى دالة قضية تشتمل على حد واحد فقط فهى مكافئة للحكم بالدخول تحت الفصل المعرف بدالة القضية . ومن الواضح فساد كلا من هذه البديهية أو المبدأ القائل بأن كل فصل يمكن أن يؤخذ كحد واحد ، ولا يوجد اعتراض جوهرى على رفض أى واحد منهما . ولكننا إذا رفضنا البديهية نشأ هذا السؤال : أى دوال القضايا تعرف الفصول ذات الحد الواحد كما تعرف ذات الحدود الكثيرة ، وأيها لا يعرف ؟ وبهذا السؤال تبدأ صعوباتنا الحقيقية .

إن أى طريقة نحاول بها إثبات تعالق Correlation واحد بواحد أو كثير بواحد لجميع الحدود أو جميع دوال القضايا فيجب أن تغفل على الأقل دالة قضية . ومثل هذه الطريقة يمكن أن توجد إذا كانت جميع دوال القضايا يمكن التعبير عنها فى صورة . . . ل ، ما دامت هذه الصورة تعالق بين ل وبين . . . . ل . ولكن استحالة مثل هذا التعالق يثبت كما يأتى ؛ ليكن Φ س دالة قضية تتعالق مع س ، فإذا كان التعالق يشمل جميع الحدود ، فإن إنكار $\Phi_{س}$ (س) سيكون دالة قضية ، ما دامت أنها قضية لجميع قيم س . ولكنها لا يمكن أن يشتمل التعالق عليها ، لأنها إذا كانت متعالقة مع ا ، كانت $\Phi_{ا}$ (س) مكافئة ، لجميع قيم س ، مع رفض $\Phi_{س}$ (س) . ولكن هذا التكافؤ مستحيل لقيمة ا ما دامت تجعل $\Phi_{ا}$ (ا) مكافئة لرفضها نفسها . وينشأ عن ذلك أن هناك دوال قضايا أكثر من الحدود — وهى نتيجة يظهر أنها مستحيلة ، ولو أن البرهان مقنع كأى برهان آخر فى الرياضة . وسوف نرى بعد قليل كيف ترفع هذه الاستحالة بمذهب الأصناف المنطقية .

١٠٣ — وأول طريقة تفرض نفسها هى البحث عن إبهام فى معنى [٤] . ولكننا فى الباب السادس قد ميزنا المعانى المتعددة إلى أقصى ما يمكن من التمييز ورأينا أن نفس التناقض يظهر مع كل معنى . ومع ذلك فلنحاول التعبير عن التناقض فى صيغة دوال القضايا . لقد افترضنا أن كل دالة قضية ليست صفرا تُعَرِّف فصلا ، وكل فصل يمكن بالتأكيد أن يُعَرَّف بدالة قضية . فقولنا بأن

فصلا كواحد ليس حداً لنفسه ككثير هو القول بأن الفصل كواحد يحقق الدالة التى عرف بها ككثير . وما دامت جميع دوال القضايا ما عدا الصفر منها تعرف فصولا ، فسوف تُستَنْفَد كلها مع اعتبار جميع الفصول التى لها الخاصة المذكورة ، ما عدا التى ليس لها تلك الخاصة المذكورة . ولو كانت أى دالة قضية محققة من كل فصل له الخاصة المذكورة ، لكانت بالضرورة محققة أيضا من الفصل ﻫ ، وهو كل الفصول المعتبرة كحد واحد . وبناءً على ذلك فإن فصل ﻫ لا ينتمى بذاته إلى الفصل ﻫ ، ومن ثَمَّ يجب أن يكون هناك دالة قضية تحققها حدود ﻫ ولا يحققها ﻫ ذاته . وهكذا يرجع التناقض إلى الظهور ، وعلينا أن نفترض إما عدم وجود شىء مثل ﻫ ، أو أنه ليس هناك دالة قضة تحققها جميع حدوده دون غيرها .

وقد يُظن أنه يمكن إيجاد حل بإنكار مشروعية دوال القضايا المتغيرة . فلو دللنا مؤقتا بالرمز ك φ لفصل القيم المحققة φ ، كانت دالة قضيتنا هى رفض (ك φ) ، حيث φ هى المتغير . إن المذهب الذى بسطناه فى الباب السابع من أن φ ليس شيئا منفصلا قد يجعل مثل هذا المتغير يبدو غير مشروع . ولكن هذا الاعتراض يمكن التغلب عليه بأن نحل محل φ فصل القضايا φ س أو العلاقة بين φ س و س . وفضلا عن ذلك فمن المستحيل استبعاد دوال القضايا المتغيرة بتاتا . فحيث يحصل فصلٌ متغير ، أو علاقة متغيرة فقد سلمنا بدالة قضية متغيرة هى بذلك جوهرية للأحكام عن كلّ فصل أو كل علاقة . فتعريف ميدان العلاقة مثلا وجميع القضايا العامة التى تكوِّن حساب العلاقات مقضىٌ عليه برفضنا السماح بهذا الضرب من التغير . وهكذا فنحن فى حاجة إلى بعض الخصائص الأخرى التى بها نميز بين نوعين من التغير . وأحسب أننا قد نجد هذه الخصيصة فى التغير المستقل للدالة والموضوع . وبوجه عام فإن φ س هى ذاتها دالة متغيرين هما φ ، س . ومن هذين المتغيرين إما أن نعطى أحدهما قيمة ثابتة ، وإما أن نغيرهما دون أن يرجع أحدهما إلى الآخر .

ولكن فى نموذج دوال القضايا التى نبحثها فى هذا الباب ، الموضوع هو نفسه دالة لدالة القضية : فبدلا من Φ س نضع Φ { ء (Φ) } ، حيث ء (φ) تعرف كدالة Φ . وهكذا حين تغير Φ ، فإن الموضوع الذى يحكم فيه على Φ يتغير أيضا . وهكذا فإن « س هو أحد س » تكافئ « Φ يمكن أن يحكم به على فصل الحدود التى تحقق φ » حالة كون هذا الفصل من الحدود هو س . فلو تغير هنا Φ ، فإن الموضوع يتغير فى الوقت نفسه بشكل يتوقف على تغير Φ . ولهذا السبب فإن Φ { ء (Φ) } ولو أنها قضية محدودة حين يُعين س ، إلا أنها ليست دالة قضية بالمعنى العادى حين يكون س متغيرا . ويمكن تسمية دوال القضايا التى من هذا الصنف المشكوك فيه باسم الصور التربيعية لأن المتغير يدخل بطريقة شبيهة بعض الشىء بما يحدث فى الجبر من ظهور المتغير فى معادلة من الدرجة الثانية .

١٠٤ ـ ولعل أفضل طريقة لبيان الحل المقترح هو أن نقول إنه إذا كانت مجموعة من الحدود إنما يمكن أن تعرف بدالة قضية متغيرة فإن الفصل كواحد يجب أن يرفض ، ولو أن الفصل ككثير قد يقبل . وحين يقرر بهذا الشكل يظهر أن دوال القضايا يمكن أن تغير بشرط ألا تدخل أبدا المجموعة المستنبطة فى الموضوع فى دالة القضية الأصلية . وفى مثل هذه الأحوال لا يوجد إلا فصل ككثير لا فصل كواحد . وقد اعتبرنا الأمر كبديهية أن الفصل كواحد يوجد حيثما وجد فصل ككثير . ولكن هذه البديهية لا يجب قبولها قبولا عاما ، ويبدو أنها منبع التناقض . فإذا رفضناها انحلت الصعوبة كلها .

ستقول إذن إن الفصل كواحد هو شىء من الصنف نفسه كحدوده ، ونعنى بذلك أن أى دالة قضية Φ (س) تكون ذات معنى حين نستبدل أحد الحدود بـ س تكون كذلك ذات معنى حين نستبدل الفصل كواحد . ولكن الفصل كواحد لا يوجد دائما ، والفصل ككثير من صنف مختلف عن حدود الفصل ، حتى حين إنما يكون للفصل حدٌ واحد ، مثال ذلك هناك دوال قضايا Φ (ل)

فيها ل قد يكون الفصل ككثير ، وهذه الدوال تخلو من المعنى إذا استبدلنا بـ ل أحد حدود الفصل . وهكذا فإن « سـ واحد من السينات » لا تكون قضية على الإطلاق إذا كانت العلاقة الداخلة هى علاقة حد بفصله ككثير . وهذه هى العلاقة الوحيدة التى إن وجدت فإن دالة القضية تكون مصدر اطمئنان لنا على الدوام . وطبقا لهذه النظرة قد يكون الفصل ككثير موضوعاً منطقيا ، ولكن فى قضايا من نوع مختلف عن تلك التى تكون فيها حدوده موضوعات . وإذا كان الشىء أكثر من حد مفرد ، فإن سؤالنا هل الشىء واحد أو كثير ، سيكون له أجوبة مختلفة بحسب القضية التى يقع فيها . مثل ذلك « سقراط واحد من الناس » نجد فيها أن الناس جمع . أما « الناس أحد أنواع الحيوان » فالناس فيها مفرد . فالتمييز بين الأصناف المنطقية هو مفتاح السر كله[١] .

١٠٥ — وطرق أخرى قد تقترح للتخلص من التناقض تبدو غير مرغوب فيها على أساس أنها تفسد الكثير من أنواع القضايا الضرورية جدا . وقد يقترح أن التطابق داخل فى قولنا « سـ ليست أحد سـ » بطريقة غير مقبولة . ولكننا قد بينا من قبل أن علاقات الحدود بأنفسها مما لا يمكن تجنبه ، ولعلنا نلاحظ أن المنتحرين أو العصاميين أو أبطال سميلز Smiles « ساعد نفسك »[٢] كلهم معرفون بعلاقات مع أنفسهم . وعلى العموم فإن التطابق يدخل بطريقة شبيهة جدا فى اللزوم الصورى بحيث يكون من المستحيل استبعاده .

واقتراح طبيعى للهرب من التناقض هو الاعتراض على فكرة جميع الحدود أو جميع الفصول . وقد يقال إن مثل هذا الحاصل لا يمكن تصوره . وإذا كانت « كل » تشير إلى المجموع فهروبنا من التناقض يحتاج منا إلى التسليم بهذا . غير أننا قد رأينا فيما سلف كثيراً أنه إذا تمسكنا بهذه النظرة ضد أى حد ، لاستحالت كل حقيقة صورية ، ولألغيت الرياضة التى صفتها هى تقرير الحقائق الخاصة بأى حد بضربة قلم . وهكذا فإن التقرير الصحيح للحقائق

---

(١) انظر فى هذا الموضوع الملحق .

(٢) صمويل سميلز (١٨١٢ — ١٩٠٤) كاتب اسكوتلاندى مشهور ، وأشهر مؤلفاته « ساعد نفسك » HelP yourself . [المترجم] .

الصورية يحتاج إلى فكرة « أى حد » أو « كل حد » ، ولكنه لا يحتاج إلى الفكرة الجمعية عن « جميع » الحدود .

وأخيرا يجب ملاحظة أنه لا توجد فلسفة خاصة داخلة فى التناقض المذكور الذى ينبع مباشرة من نظر العقل السليم ، ولا يمكن حله إلا بإغفال بعض مسلمات العقل السليم . والفلسفة الهيجلية وحدها ، تلك التى تعيش على المتناقضات ، يمكن أن تظل بغير اكتراث لأنها تجد مشكلات مشابهة فى كل مكان . أما فى أى مذهب آخر فإن مثل هذا التحدى المباشر يتطلب جواباً خشية الاعتراف بالعجز . ومن حسن الحظ أنه لا توجد بمقدار ما أعرف أى صعوبة مماثلة فى أى جزء آخر من هذا الكتاب « أصول الرياضيات » .

١٠٦ — ولعلنا الآن نستعرض فى إيجاز النتائج التى وصلنا إليها فى الجزء الأول . فقد عرفنا الرياضة بأنها فصل القضايا التى تقرر لوازم صورية ولا تشتمل على ثوابت ما عدا الثوابت المنطقية ، وهى : اللزوم ، وعلاقة الحد بالفصل الذى هى أحد حدوده ، ومعنى « مثل » ، ومعنى العلاقة ، وغير ذلك من المعانى الأخرى الداخلة فى اللزوم الصورى ، والتى رأينا (بند ٩٣) أنها ما يأتى : دالة القضية ، الفصل [١] ، الدالة ، و « أى » أو « كل » حد . وقد رفع هذا التعريف الرياضة إلى مرتبة قريبة جدا من المنطق ، وجعلتها عمليا متطابقة مع المنطق الرمزى . ويؤدى النظر فى المنطق الرمزى إلى تبرير التعداد المذكور للامعرفات الرياضية . وقد ميزنا فى الباب الثالث بين اللزوم وبين اللزوم الصورى ، فاللزوم يصل بين أى قضيتين بشرط أن تكون الأولى كاذبة أو الثانية صادقة . أما اللزوم الصورى فليس علاقة بل حكما ، لكل قيمة للمتغير أو المتغيرات لدالة قضية تقرر لزوماً لكل قيمة للمتغير أو المتغيرات . وفى الباب الرابع ميزنا بين ما سميناه الأشياء من المحمولات والعلاقات (ويشتمل ذلك على « هو » الخاصة بالحمل مع غيرها من العلاقات فى هذا الغرض) . وقد بينا أن هذا التمييز مرتبط بمذهب

---

(١) إن معنى الفصل بوجه عام ، كما قررنا ، يمكن استبداله باعتبار أنه لا يعرف ، بفصل القضايا التى تعرفها دالة قضية .

الجوهر والأعْراض ، ولكنه لا يؤدى إلى النتائج التقليدية . وكشفنا فى الباب الخامس والسادس عن نظرية المحمولات ، فبينا فى الباب الخامس أن بعض التصورات المشتقة من المحمولات تقع فى قضايا لا حول أنفسها بل « حول » تركيبات من الحدود كما يتبين من « جميع » ، و« كل» ، و«أى» ، و « أحد» ، و« بعض »، و« أل» . ورأينا أن التصورات من هذا النوع أساسية فى الرياضة وتجعلنا قادرين على النظر فى الفصول اللامتناهية بواسطة قضايا ذات تعقيد متناه . وميزنا فى الباب السادس المحمولات ، وفصول التصورات ، وتصورات الفصول ، والفصول ككثير ، والفصول كواحد . واتفقنا على أن الحدود المفردة ، أو مثل هذه التركيبات التى تنتج عن الجمع بالواو ، هى فصول ، والأخيرة منها هى الفصول ككثير . وأن الفصول ككثير هى الأشياء التى تدل عليها تصورات الفصول ، التى هى جمع فصول التصورات . ولكننا فى الباب الحاضر انتهينا إلى أنه من الضرورى التمييز بين الحد المفرد وبين الفصل الذى إنما هو حده الوحيد ، مما يترتب عليه إمكان قبول الفصل الصفر .

ولخصنا فى الباب السابع دراسة الفعل . ورأينا أن القضايا الحملية المركبة من موضوع ومحمول ، والقضايا التى تعبر عن علاقة ثابتة بحد ثابت ، يمكن تحليلها كما رأينا إلى موضوع وحكم ؛ ولكن هذا التحليل يصبح مستحيلا عندما يدخل حد معين فى قضية بطريقة أكثر تعقيدا من مجرد أن يكون متعلقا به للعلاقة . ومن أجل ذلك وجب أن نأخذ دالة القضية على أنها فكرة أولية . ودالة قضية لمتغير واحد هى أى قضية لمجموعة Set تعرف بتغير حد مفرد على حين تظل الحدود الأخرى ثوابت . ولكن على العموم من المستحيل تعريف أو عزل العنصر الثابت فى دالة قضية ما دام الذى يتبقى حين يطرح حد معين حيثما يقع من قضية ليس بوجه عام شيئا يقبل الكشف عنه . وهكذا لا يجب أن يحذف ببساطة الحد المذكور بل يستبدل متغير به .

ورأينا أن معنى المتغير فى غاية التعقيد . ذلك أن سه ليس مجرد «أى» حد ، بل هو أى حد له فردية معينة ، وإلا ما أمكن التمييز بين أى متغيرين . واتفقنا

على أن المتغير هو أى حد من حيث إنه حد فى دالة قضية معينة ، وأن المتغيرات تتميز بدوال القضايا التى تقع فيها ، أو فى حالة وجود متغيرات عدة ، بالموضع الذى تشغله فى دالة قضية معطاة كثيرة التغيرات . وقد قلنا إن المتغير هو الحد فى أى قضية ذات هيئة تدل عليها دالة قضية معينة .

وقد وضحنا فى الباب التاسع أن القضايا العلاقية نهائية ، ولها جميعا جهة : نعنى ما دامت العلاقة هى تصور ، من حيث هو كذلك ، فى قضية لها حدان ، فهناك قضية أخرى تشتمل على نفس الحدين ونفس التصور ، من حيث هو كذلك ، كما فى قولنا « ا أكبر من ب » و « ب أكبر من ا » . وهاتان القضيتان على الرغم من اختلافهما يشتملان بالضبط على نفس المفردات . وهذا شىء من خصائص العلاقات ، ومثالٌ على الخسارة الناتجة من التحليل . واتفقنا على أن العلاقات يجب أن تؤخذ مفهومياً لا كفصول ذات روابط [١] .

وأخيراً فى الباب الحاضر بحثنا التناقض الناتج من الحقيقة الظاهرة وهى أنه إذا كان ه هو فصل جميع الفصول التى كحدود مفردة ليست حدودا لأنفسها ككثير ، إذن ه كواحد يمكن إثباته على السواء بأن يكون أو لا يكون حداً لنفسه ككثير . وكان الحل المقترح أنه من الضرورى التمييز بين أصناف متعددة من الأشياء ، نعنى الحدود ، وفصول الحدود ، وفصول الفصل ، وفصول روابط الحدود ، وهكذا . وأن دالة القضية φ س تحتاج بوجه عام إذا وجب أن يكون لها معنى إلى أن تنتمى س لصنف واحد مّا . وهكذا فإن س هى س أخذت على أنها لا معنى لها لأنها تحتاج إلى أن يكون المتعلق فصلا مركبا من أشياء هى من نفس الصنف المتعلق به . وقلنا إن الفصل كواحد حيثما يوجد فهو من نفس الصنف كمفرداته ؛ ولكن دالة القضية التربيعية يظهر على العموم أنها إنما تعرف فصلا ككثير ، ويثبت التناقض أن الفصل كواحد إن وُجد على الإطلاق ، فلا نزاع فى غيابه أحياناً .

(١) ومع ذلك انظر فى هذه النقطة الملحق .

فهرس

تم طبع هذا الكتاب على مطابع
دار المعارف بمصر سنة ١٩٥٨

أُصولُ الرِّياضيات

مكتبة
الدراسات الفلسفية

جامعة الدول العربية
الإدارة الثقافية

برتراند رسل

أصول الرياضيات
٢

ترجمة

الدكتور محمد مرسى أحمد و الدكتور أحمد فؤاد الأهوانى

دار المعارف بمصر

ملتزم الطبع والنشر : دار المعارف بمصر — ٥ شارع ماسبيرو — القاهرة

الجُزءُ الثَّاني

العـــدد

الباب الحادى عشر

تعريف الأعداد الأصلية

١٠٧ – لقد انتهينا الآن من استعراض جهاز المعانى المنطقية العامة التى تعمل بها الرياضة . وسنبين فى هذا المجلد الثانى كيف أن هذا الجهاز ، دون حاجة إلى جديد من اللامعرفات ولا المسلمات ، يكفى لأن تقوم عليه نظرية الأعداد الأصلية بأجمعها كفرع خاص من فروع المنطق . ولقد أحرزت نظرية الحساب فى الوقت الحاضر من التقدم أكثر مما أحرز أى موضوع آخر من موضوعات الرياضة . ولقد اتجه ڤيرشتراس نحو صحة الاستنباط ،ولعت فى متابعة بحوثه أسماء ديدكند وكانتور ، وفريج وبيانو ،ويبدو أن هذا الاتجاه قد بلغ غايته عن طريق منطق العلاقات .

ولما كانت النظرية الرياضية الحديثة غير معروفة معرفة تامة حتى عند غالبية الرياضيين أنفسهم ، فسأبدأ هذا المجلد بأربعة أبواب أوضح فيها معالم هذه النظرية فى صورة غير رمزية . ثم أتابع ذلك بالنظر فى عملية الاستنباط من وجهة النظر الفلسفية على أصل من هذا إلى الكشف عما إذا كانت بعض الفروض غير الظاهرة قد أقحمت نفسها بصورة مستترة فى سبيل البرهان .

١٠٨ – وكثيراً ما نسلم بأن كلا من العدد والأعداد الخاصة هى مما لا يقبل التعريف ،ولكن القابلية للتعريف من وجهة النظر الرياضية هى عبارة ذات معنى محدد ،وإن كان تحديدها هو دائماً بالنسبة إلى مجموعة معينة من المعانى . فإذا أعطيت مجموعة من المعانى فإن حداً ما يمكن تعريفه عن طريق هذه المعانى إذا كان هو الحد الوحيد الذى له مع بعض هذه المعانى علاقة معينة هى فى حد ذاتها إحدى معانى المجموعة ، ولا يكون قابلاً للتعريف إلا إذا توفر هذا الشرط . ومن الناحية الفلسفية لم يستخدم لفظ التعريف فيما جرت به العادة بهذا المعنى إذ فى الواقع

قد اقتصر على تحليل فكرة ماَّ إلى مكوناتها . وفى اعتقادى أن هذا الاستخدام مما لا يمكن الارتياح له ، وهو عديم الفائدة ، فضلاً عن أنه يغفل حقيقة أن الكُلاّت ، لا تتحدد فى الغالب الأعم متى عرفت أجزاؤها ، بل هى فى حد ذاتها أشياء (وقد تكون من بعض الوجوه بسيطة) تعرف من الوجهة الرياضية بعلاقات معينة بأجزائها . ومن أجل ذلك فسأصرف النظر عن الوجهة الفلسفية وأقتصر فى الكلام عن الناحية الرياضية من القابلية للتعريف . ومع هذا فإنى مقيد لهذا المعنى بأكثر مما فعل بيانو ومن نحا نحوه . فهم يقولون بأن فروع الرياضة المختلفة لها مجموعات مختلفة من اللامعرفات بوساطتها يمكن تعريف باقى معانى هذه الفروع ، ولكنى أقول : إن جميع الرياضة البحتة (بما فى ذلك الهندسة والديناميكا النسبية) تشتمل على مجموعة واحدة من اللامعرفات وهى التصورات المنطقية الأساسية التى تكلمنا عنها فى المجلد الأول . وسيكون من أهم الأغراض التى أضعها نصب عينى أن أثبت هذا القول . وعند ما نسرد شتى الثوابت المنطقية فإن أمر اعتبار أيها مما لا يقبل التعريف أمر اختيارى إلى حد ماَّ ، ولو أن بعضها سيكون مما لا يقبل التعريف فى أية نظرية كانت . ولكنى أذهب إلى أن كل ما لا يقبل التعريف فى الرياضة البحتة هو من هذا النوع الأخير ، وأن ظهور غيرها مما لا يقبل التعريف هو دليل على أن الموضوع من موضوعات الرياضة التطبيقية . وقد سلم بيانو بثلاثة أنواع من التعريف : التعريف الاسمى ، والتعريف بالمسلمات ، والتعريف بالتجريد [١] . ومن هذه الأنواع لا أعترف إلا بالاسمى ، وأما الآخران فلم تكن لنا فيما يبدو حاجة إليهما لولا رفض بيانو اعتبار العلاقات جزءاً من الجهاز الأساسى فى المنطق ، ولولا تسرعه فى اعتبار الفرد ما كان فى الحقيقة فصلا . وأحسن ما يوضح هذه الملاحظات هو النظر فى تطبيقها على تعريف الأعداد الأصلية .

١٠٩ — كان الشائع فى الماضى — بين من يقولون بإمكان تعريف الأعداد —

---

(١) انظر Burali-Forti, "Sur les différentes définitions du nombre réel" Congrès, III, p. 294 ff.

أن يستثنى العدد ١ من هذه القاعدة ، وأن تعرف باقى الأعداد عن طريقه . فالعدد ٢ كان ١ + ١ ، ٣ هو ٢ + ١ وهكذا . وهذه الطريقة لا يمكن تطبيقها إلا على الأعداد المتناهية ، وهى تضع فرقاً لا موجب له بين ١ والأعداد الأخرى ، فضلاً عن أنها لم تفسر لنا عادة معنى + . ونستطيع اليوم أن ندخل تحسيناً كبيراً على هذه الطريقة . فنى أول الأمر ، لما كان كانتور قد بين كيف نعالج اللانهاية فقد أصبح فى إمكاننا — وهذا أمر مرغوب فيه أيضاً — أن نعالج الخصائص الأساسية للأعداد بطريقة يمكن تطبيقها على الأعداد المتناهية وغير المتناهية على حد سواء . ومن جهة ثانية قد مكننا الحساب التحليلى المنطقى من إيجاد تعريف مضبوط لعملية الجمع فى الحساب . ثم من جهة ثالثة قد أصبح تعريف ٠ (صفر) ، ١ سهلاً كتعريف أى عدد آخر . ولكى أوضح كيف يمكن عمل هذا سأبدأ بوضع تعريف الأعداد بالتجريد، ثم أبين العيوب الصورية فى هذا التعريف ، وأستعيض عنه بالتعريف الاسمى .

ومن المسلم به أنه يمكن تطبيق الأعداد أساساً على الفصول ، حقاً إنه عند ما يكون العدد متناهياً ، فإنه يمكن عد الأفراد التى تكون هذا العدد ، ويمكن عدها واحداً واحداً دون ذكر لفصل تصور مّا ، ولكن كل المجاميع المتناهية من الأفراد تكوّن فصولاً ، ولذلك فإن ما نحصل عليه هو فى آخر الأمر جميع عدد الفصل ، وعند ما يكون العدد لامتناهياً فلا يمكن عد أفراده ، ولابد من تعريفه بالمفهوم ، أى بخاصية مشتركة بين الأفراد بفضلها تكوّن فصلاً . نخرج من هذا أننا إذا علمنا فصل تصور مّا فإن هناك عدداً من الأفراد ينطبق عليها فصل التصور هذا ، وحينئذ يمكن اعتبار هذا العدد خاصية من خصائص الفصل . وبفضل وجهة النظر هذه أمكن بناء نظرية اللانهاية كلها لأنها أعفتنا من الحاجة إلى عد الأفراد التى نتكلم عن عددها ، وتعتمد وجهة النظر هذه أساساً على فكرة « الجميع » ، أى العطف العددى كما اصطلحنا عليها (بند ٥٩).فجميع الناس ، مثلاً ، تدل على الناس مجتمعين بطريقة خاصة ، وبهذه الدلالة فلهم عدد . وبالمثل «جميع الأعداد» أو « جميع النقط » تدل على الأعداد أو النقط

مجتمعة بطريقة خاصة ، وباجتماع الأعداد أو النقط هكذا فلها عدد . فالأعداد إذن يجب أن تعتبر خواص للفصول .

والسؤال التالى هو : متى يكون لفصلين نفس العدد ؟ وجواب هذا ، أن لهما نفس العدد عند ما ترتبط حدودهما أرتباط واحد بواحد ، فيكون أى حد فى أحدهما يناظر حداً فى الفصل الآخر ولا يناظر سواه . ويتطلب هذا وجود علاقة واحد بواحد ميدانها أحد الفصلين وميدانها العكسى هو الفصل الآخر . فمثلا فى المجتمع الذى فيه جميع الرجال وجميع النساء متزوجون ، والذى لا يسمح فيه بتعدد الأزواج أو الزوجات ، يكون عدد الرجال هو نفس عدد النساء . وقد يتبادر إلى الذهن أن علاقة واحد بواحد لا يمكن تعريفها دون الإشارة إلى العدد ١ . وليس هذا هو الحال ، فالعلاقة هى علاقة واحد بواحد إذا كانت س ، سَ لهما هذه العلاقة مع ص ، فإن س ، سَ متطابقان . بينما إذا كانت س لها هذه العلاقة مع ص ، صَ فإن ص ، صَ متطابقان . وكذلك يمكن دون استخدام فكرة الوحدة أن نعرف ماذا نعنى بعلاقة واحد بواحد . ولكى نستطيع أن نعالج حالة الفصلين اللذين لا حدود لهما يجب أن نعدل قليلاً ما نعنيه بقولنا : إن فصلين لهما نفس العدد ، لأنه إذا لم توجد الحدود ، فالحدود لا يمكن ارتباطها ارتباط واحد بواحد . بل يجب أن نقول : يكون للفصلين نفس العدد إذا وجدت علاقة واحد بواحد ميدانها يشتمل على أحد الفصلين بحيث يكون فصل نظائر حدود أحد الفصلين متطابقاً مع الفصل الآخر . ويتضح من هذا أن الفصلين اللذين لا حدود لهما يكون لهما دائماً نفس عدد الحدود ، لأننا لو أخذنا علاقة واحد بواحد أيا كانت ، فإن ميدانها يشتمل على الفصل الصفرى ؛ وفصل نظائر الفصل الصفرى ، هو مرة أخرى الفصل الصفرى . وعند ما يكون لفصلين نفس العدد يقال إنهما متشابهان .

وقد يذهب بعض القراء إلى أن تعريف ما نعنيه بقولنا إن لفصلين نفس العدد أمر لا لزوم له ألبتة ، وهم يقولون فى ذلك : إن الطريق لإثبات هذا هو أن نعد كلا الفصلين . ومثل هذه الأفكار هى التى حالت ، إلى وقت قريب ، دون

عرض الحساب كفرع من المنطق البحت . وإلا فماذا نعنى بالعد ، وهو سؤال قلما نجد له جواباً غير جواب نفسانى لا يغنى شيئاً كالقول بأن العد عملية انتباه متعاقب . فلكى نعد ١٠ أفترض أنه يلزم لنا عشرة عمليات انتباه ، وبكل تأكيد ، هذا تعريف نافع جداً للعدد ١٠ ! والواقع أن للعد معنى قوياً ، ولكنه ليس نفسانياً ، ولكن هذا المعنى فى غاية التعقيد ، وهو لا ينطبق إلا على الفصول ذات الترتيب الكامل ؛ وليست كل الفصول كذلك وهى لا تعطينا عدد الفصل إلا عند ما يكون هذا العدد متناهياً — وهى حالة استثنائية ونادرة الوقوع . ومن أجل ذلك لا ينبغى أن ندخل العد عند ما يكون الكلام عن تعريف الأعداد .

ولعلاقة التشابه بين الفصول ثلاث خصائص . فهى متعاكسة ومتماثلة ومتعدية . أى أنه إذا كانت ى ، ف ، و ، فصولاً فإن ى شبيه بنفسه ، وإذا كان ى يشابه ف ، فإن ف يشابه ى ؛ وإذا كان ى يشابه ف . وكان ف يشابه و ، فإن ى يشابه و . وهذه الخصائص تنجم بسهولة من التعريف ، وفى نظر بيانو أن هذه الخواص الثلاث للعلاقة تشير إلى أنه عند ما تقوم علاقة بين حدين ، فإن لهذين الحدين خاصية مشتركة ما ، وبالعكس . وهذه الخاصية المشتركة هى ما نسميه عددهما [1] . وهذا هو تعريف العدد بالتجريد .

١١٠ — ولكن هذا التعريف بالتجريد ، وبوجه عام العملية المستخدمة فى مثل هذه التعاريف ، يشوبها عيب شكلى شنيع ، فهى لا تبين أن هناك موضوعاً واحداً يحقق التعريف . وعلى ذلك فبدلاً من أن نحصل على خاصية واحدة مشتركة بين الفصول المتشابهة ، وهو عدد الفصل الذى نتكلم عنه ، نحصل على فصل من هذه الخواص ، ولا سبيل لنا لمعرفة كم من الحدود يشتمل عليها هذا الفصل . ولزيادة الإيضاح ، دعنا نبحث عما نعنيه فى هذا الكلام بالخاصية المشتركة . والذى نعنيه هو أن أى فصل له مع شىء بالذات ، أى عدده ، علاقة لا تقوم معه ومع أى شىء آخر ، فى حين جميع الفصول الشبيهة به (ولا شىء آخر) لها

---

(١) انظر Peano, F. 1901, § 32, 0, Note.

نفس العلاقة مع العدد المذكور . أى أن هناك علاقة كثير بواحد تقوم بين كل فصل وعدده ولا تقوم بينه وبين أى شىء آخر ؛ ومقتضى التعريف بالتجريد هو : أى مجموعة من الأشياء لكل واحد منها فصل معين له معها علاقة معينة للكثير بالواحد ، وكل فصل معلوم له هذه العلاقة مع واحد وواحد فقط من هذه الأشياء، وهذه الأشياءهى بحيث أن جميع الفصول الشبيهة بفصل معين لها هذه العلاقة مع شىء واحد بعينه من المجموعة . مثل هذه المجموعةهى مجموعة الأعداد، وأىواحد من هذه المجموعة هو عدد فصل مّا . فإذا كان هناك كثير من مثل هذه المجموعات من الأشياء ، ومن اليسير إثبات أن هناك عدداً لا نهائيًّا منها ، فلكل فصل أعداد كثيرة ، ويعجز التعريف عن أن يعرف عدد الفصل . وهذا القول صحيح بصفة عامة، ويبين أن التعريف بالتجريد ليس عملية منطقية سليمة أبداً .

١١١ — وهناك طريقتان نستطيع بهما أن نحاول علاج هذا العيب. إحداهما أن نعرف عدد الفصل بأنه كل فصل الأشياء ، بحيث نختار شيئاً واحداً من كل مجموعة من مجموعات الأشياء السابقة ، والذى له مع جميع الفصول المشابهة للفصل المعلوم علاقة مّا لكثير بواحد أو غير ذلك .

ولكن هذه الطريقة عديمة الجدوى من الناحية العملية ، لأن جميع الأشياء دون استثناء، تتبع كل فصل من هذا النوع ، ولذلك فسيكون كل فصل له عدد هو فصل جميع الأشياء من كل نوع ومن كل وصف . والعلاج الآخر ، وهو الأفضل من الوجهة العملية ، وينطبق على جميع الحالات التى يستخدم فيها بيانو التعريف بالتجريد . وهذه الطريقة هى أن يعرف عدد الفصل بأنه فصل جميع الفصول المشابهة للفصل المعلوم . وعضوية فصل الفصول هذا (باعتباره محمولاً) هى خاصة مشتركة لجميع الفصول المشابهة وليست لغيرها . وفضلاً عن ذلك فكل فصل من مجموعة الفصول المشابهة له مع المجموعة علاقة لا تقوم بينه وبين أى شىء آخر ، وهى تقوم لكل فصل وبين مجموعته ، وبذلك يحقق فصل الفصول هذا الشروط تحقيقاً كاملاً ،وله ميزة التحديد عندما يُعلم الفصل

وأنه يختلف بالنسبة لفصلين غير متشابهين ، فهذا إذن تعريف ، لا مأخذ فيه ، لعدد الفصل فى عبارة منطقية بحتة .

وإن اعتبار العدد فصل فصول قد يبدو لأول وهلة من المتناقضات التى لا يمكن الدفاع عنها — وفى ذلك يقول بيانو: « لا تمكن مطابقة عدد (الفصل) ا بفصل الفصول الذى نتكلم عنه (أى فصل الفصول المشابهة للفصل ا) لأن هذه الأشياء ذات خواص مختلفة». وهو لا يذكر لنا ما هى هذه الخواص ، وأجد نفسى عاجزاً عن الكشف عنها . ومن المحتمل أنه بدا له من أول الأمر أن العدد ليس فصل فصول؛ ومع ذلك يمكن أن يقال شىء لتخفيف مظهر هذا التناقض . فأولا : تدل كلمة زوج أو ثلاثى فعلاً على فصل فصول . وما علينا أن نقول ، مثلا ، إن « رجلين » يعنى « حاصل الضرب المنطقى لفصل الرجال وزوج » وقولنا : «يوجد رجلان » معناه « يوجد فصل من الرجال هو أيضاً زوج» وثانياً : إذا تذكرنا أن فصل التصور ليس فى حد ذاته مجموعة ولكنه خاصية تعرف بها المجموعة ، علمنا أننا إذا عرفنا العدد بأنه فصل التصور لا الفصل ، فإن العدد يعرف فى الواقع كخاصية مشتركة لمجموعة من الفصول المتشابهة ولا تقوم لشىء آخر .

وهذا يزيل مظهر التناقض البادى لدرجة كبيرة ، ولكن هناك صعوبة فلسفية فى وجهة النظر هذه ، وبوجه عام، فى الصلة بين الفصول والمحمولات . فقد توجد محمولات كثيرة مشتركة لمجموعة معينة من الأشياء لا لغيرها . وفى هذه الحالة تعتبر هذه المحمولات متكافئة من وجهة نظر المنطق الرمزى ويقال إن أى واحد منها مساو لأى محمول آخر ، وعلى ذلك إذا عرفنا المحمول بمجموعة الأشياء ، فلا نحصل عادة على محمول واحد ، ولكن على فصل من المحمولات ، ولهذا الفصل من المحمولات نحتاج إلى فصل تصور جديد ، وهكذا . وليس أمامنا فصل تصور غير « قابلية مجموعة معينة من الحدود للحمل ولا لشىء آخر » ولكن فى هذه الحالة ، التى نعرف فيها المجموعة بواسطة علاقة معينة لها مع واحد من حدودها ، هناك خطر الوقوع فى خطأ منطقى . فإذا كانت ى فصلاً ، فإنا نقول إن عدد ى هو فصل الفصول المتشابهة مع ى . ولكن

« المتشابهة مع ى » لا يمكن أن يكون التصور الفعلى الذى يكون العدد ى ، لأنه لو كان ف متشابهاً مع ى ، فإن « المتشابهة مع ف » تعرف نفس الفصل ، مع أنه تصور آخر . من أجل ذلك نحتاج فى تعريف محمول فصل الفصول المتشابهة إلى تصور مَّا ليست له علاقة خاصة مع واحد أو أكثر من الفصول المكونة . فبالنسبة لأى عدد خاص نذكره بالذات ، سواء أكان متناهياً أم غير متناه ، يمكن الكشف فى واقع الأمر عن مثل هذا المحمول ، أما إذا كان كل ما عندنا عن العدد هو أنه عدد فصل مَّا ى ، فمن الطبيعى أن تظهر إشارة خاصة للفصل ى فى التعريف . وليس هذا هو المهم ، إنما المهم أن المعرّف هو واحد بعينه سواء استخدمنا المحمول « متشابهة مع ى » أو « متشابهة مع ف » ما دام ى يشابه ف ، وهذا يوضح أن المعرّف ليس له فصل التصور أو المحمول المعرّف ، ولكنه هو الفصل ذاته ، والذى حدوده هى شتّى الفصول المتشابهة مع ى أو ف ، ومثل هذه الفصول إذن ، لا المحمولات من مثل « متشابه مع ى » ، هى التى يجب أن تعتبر مكوّنة للأعداد .

والخلاصة ، فالعدد ، من الوجهة الرياضية ، ليس شيئاً آخر سوى فصل الفصول المتشابهة. وهذا التعريف يسمح باستنتاج جميع الخواص العادية للأعداد سواء كانت متناهية أم لا متناهية ، وهو إلى حد علمى التعريف الوحيد الممكن فى حدود التصورات الأساسية للمنطق العام . ولكن من الوجهة الفلسفية يمكن التسليم بأن كل مجموعة من الفصول المتشابهة لها محمول مَّا مشترك ، لا ينطبق على أشياء غير الفصول التى نتكلم عنها ، وإذا وجدنا بعد الفحص أن هناك فصلاً معيناً من مثل هذه المحمولات المشتركة ، ومنها محمول واحد ، ولا يوجد غيره ، ينطبق على كل مجموعة من الفصول المتشابهة ، فإنه يكون فى مكنتنا إذا استحسنا ذلك أن نسمى فصل المحمولات هذا فصل الأعداد . وإنى من جهتى لا أعرف أيوجد فصل المحمولات هذا ، ولكنى أعرف أن مثل هذا الفصل إن وجد فإنه يكون غريباً تماماً عن الرياضة . وكلما اشتقت الرياضة خاصة مشتركة من علاقة عكسية أو متماثلة أو متعدية تحققت جميع الأغراض الرياضية لتلك الخاصية المشتركة

تحققاً تاماً إذا استبدلنا بها فصل الحدود التى لها العلاقة المعلومة مع حد معلوم . وهذا بالضبط هو ما تقدمه لنا الأعداد الأصلية . ومن أجل ذلك فسألتزم فى كل ما يلى التعريف السابق ، لأنه يجمع بين الدقة والكفاية لجميع الحاجيات الرياضية .

الباب الثانى عشر

الجمع والضرب

١١٢ — لعل أغلب التآليف الرياضية عن العمليات الحسابية تقع فى خطأ حينما تحاول أن تبدأ بتعريف ينطبق على الأعداد المنطقة، أو حتى الأعداد الحقيقية دون إمعان النظر إمعاناً كافياً فى نظرية الأعداد الصحيحة . وفى الوقت الحاضر ستكون الأعداد الصحيحة وحدها موضع اهتمامنا . وواضح أن تعريف الأعداد الصحيحة كما أوضحناه فى الباب السابق لا يسمح بالتعميم على الكسور ، وفى الواقع إن الفرق المطلق بين الأعداد الصحيحة والكسور ، وحتى بين الأعداد الصحيحة والكسور التى مقامها الوحدة ، هو مما لا يمكن بحال المغالاة فى توكيده . وسأحاول فى مرحلة تالية أن أفسر ما هى الأعداد المنطقة وما هى الأعداد الحقيقية، كذلك سأترك جانباً الآن الكلام عن الأعداد الموجبة والسالبة ، والأعداد الصحيحة التى نتكلم عنها الآن ليست موجبة ولكنها عديمة الإشارة . وعلى ذلك فالجمع والضرب اللذين نعرّفهما فى هذا الفصل لا ينطبقان إلا على الأعداد الصحيحة فقط ، ولكن لهما ميزة انطباقهما على الأعداد الصحيحة المتناهية واللامتناهية على السواء . وسألتزم بكل دقة فى الوقت الحاضر إبعاد جميع القضايا التى تدخل فيها تناهى أو لا تناهى الأعداد .

١١٣ — لا يوجد غير نوع أساسى واحد من الجمع ألا وهو النوع المنطقى . ويمكن تعريف جميع الأنواع الأخرى بدلالة هذا النوع والضرب المنطقى ، وفى هذا الباب سنعرّف جمع الأعداد الصحيحة بهذه الطريقة . والجمع المنطقى ، كما بينا فى المجلد الأول ، هو كالانفصال تماماً . فإذا كانت ق ، ك قضيتين فإن مجموعهما المنطقى هو القضية «ق أو ك » . وإذا كان ى ، ف فصلين فإن مجموعهما المنطقى هو الفصل « ى أو ف » أى الفصل الذى يتبعه كل حد

تابع للفصل ى أو للفصل ف . ويمكن تعريف المجموع المنطقى لفصلين ى ، ف بدلالة حاصل الضرب المنطقى لقضيتين بأنه فصل الحدود التابعة لكل فصل يحتوى على كل من الفصلين ى ، ف [1] ، ولا يقتصر هذا التعريف بالضرورة على فصلين ولكنه يمكن أن يعمم إلى فصل فصول ، سواء كان متناهياً أو لا متناهياً . فإذا كان ك فصل فصول فإن المجموع المنطقى للفصول التى يتكون منها ك (وسأسميه من باب الاختصار مجموع ك) هو فصل الحدود التابعة لكل فصل يحتوى كل فصل يكون حداً من حدود ك . وهذه الفكرة هى أساس الجمع فى الحساب . فإذا كان ك فصل فصول ليس فيها فصلان بينهما حدود مشتركة (ومن باب الاختصار نسميه غير مشتركة Exclusive Class of Classes) فالمجموع الحسابى لأعداد مختلف فصول ك هو عدد الحدود التى فى المجموع المنطقى للفصل ك . وهذا التعريف ذو صفة عامة وينطبق ، سواء كان ك أو أىّ من الفصول المكونة له ، متناهياً أم لامتناهياً . ولكى نطمئن إلى أن العدد الذى نحصل عليه إنما يتوقف على أعداد مختلف فصول ك ولا يتوقف على الفصل الخاص ك الذى يصدف اختياره ، يلزم أن نثبت (وهذا أمر سهل) أنه إذا كان كَ فصل فصول غير مشتركة متشابهاً مع ك وكان كل عضو فى ك متشابهاً مع نظيره فى كَ والعكس بالعكس ، كان عدد الحدود فى مجموع ك نفسه عدد الحدود فى مجموع كَ . فمثلاً لنفرض أن ك له حدان فقط ى ، ف ، ولنفرض أن ى ، ف ليس بينهما جزء مشترك ، فإن عدد الحدود فى المجموع المنطقى للفصلين ى ، ف هو مجموع عدد الحدود فى ى وفى ف . وإذا كان ىَ متشابهاً مع ى ، فَ متشابهاً مع ف ، ولم يكن بين ىَ ، فَ جزء مشترك فإن مجموع ىَ ، فَ يكون متشابهاً مع مجموع ى ، ف .

١١٤ — ويجب أن نلاحظ أن هذا التعريف لمجموع الأعداد ، لا يمكن أن يتخلص من الإشارة إلى الفصول التى لها الأعداد التى نتكلم عنها . والعدد الذى

---

(١) F. 1901, § 2, Prop. 1.0.

نحصل عليه بالجمع هو أساساً عدد المجموع المنطق لفصل فصول معين أو لفصل مًا متشابه معه من الفصول المتشابهة . وتظهر هذه الحاجة إلى الإشارة إلى الفصول عند ما يتكرر العدد الواحد مرتين أو أكثر فى المجموع . ومما تنبغى ملاحظته أن الأعداد ليس لها « ترتيب » فى المجموع ، ولذلك فلسنا بحاجة إلى قضية مثل قانون التبادل، فإن هذه القضية ، على النحو الذى تدخل به فى الحساب ، إنما تنشأ من عيب فى الرمزية ينجم عنه ترتيب فى الرموز ليس لها ترتيب مناظر بين الأشياء المرموز لها . ونظراً لانعدام الترتيب فإن العدد إذا حدث مرتين فى عملية جمع ، فلا سبيل لنا إلى التمييز بين الحدوث الأول والحدوث الثانى لمثل هذا العدد. وإذا استبعدنا الإشارة للفصول التى لها هذا العدد فليس هناك أى معنى لحدوثه مرتين ، ويمكن تعريف عملية جمع فصل من الأعداد، ولكن لا يمكن أن يتكرر العدد فى هذه الحالة . أما فى التعريف السابق للمجموع ، فالأعداد التى نتكلم عنها معرّفة كأعداد فصول معينة ، ولذلك فلا حاجة بنا أن نقرر إذا كان العدد يتكرر أو لا يتكرر . ولكن لكى نعرّف مجموع أعداد بعضها مكرر دون الإشارة إلى فصول معينة ، يلزم أن نعرف الضرب أولا .

وزيادة فى توضيح هذه النقطة نأخذ حالة خاصة مثل ١ + ١ ، ومن الواضح أنه لا يمكن أن نأخذ العدد ١ ذاته مرتين ، لأن هناك عدداً واحداً هو ١ ولا توجد له حالتان . ولو أن المسألة هى الجمع المنطقى للعدد واحد لنفسه ، لوجب أن نجد أن ١ و ١ هو ١ بحسب القواعد العامة للمنطق الرمزى . وكذلك لا يمكن تعريف ١ + ١ بأنه المجموع الحسابى لفصل معين من الأعداد . ويمكن تطبيق هذه الطريقة بالنسبة لمجموع ١ + ٢ ، أو أى مجموع آخر لا يتكرر فيه أى عدد ولكن بالنسبة للمجموع ١ + ١ ففصل الأعداد الوحيد الذى يدخل فى الأمر هو الفصل الذى حده الوحيد ١ ولما كان لهذا الفصل عضو واحد لا عضوان فلا يمكن تعريف ١ + ١ عن طريقه . وبذلك يكون التعريف الكامل للمجموع ١ + ١ هو ما يأتى : ١+١ هو عدد فصل: وهو المجموع لفصلين ى ، ف ليس بينهما حد مشترك، ولكل منهما حد واحد لا غير. وأهم ما تجب ملاحظته هو أن الجمع

المنطقى للفصول هو الفكرة الرئيسية ، أما الجمع الحسابى للأعداد فيأتى بأكمله بعد ذلك .

١١٥ — والتعريف العام للضرب من وضع الأستاذ هوايتهيد[١] ، وهو كما يأتى : ليكن ك فصل فصول ليس فيها فصلان بينهما حد مشترك ، ولنكون ما يسمى فصل ك المضروب وهو فصل كل حد فيه فصل مكون بأخذ حد لا غير من كل فصل من الفصول المكونة للفصل ك . فيكون عدد حدود فصل ك المضروب هو حاصل ضرب أعداد مختلف الفصول المكونة للفصل ك . ولهذا التعريف ميزتان تجعله يفضل أى تعريف وضع إلى الآن ، ومثله فى هذا مثل تعريف الجمع المذكور سابقاً . وأولى هاتين الميزتين أن التعريف لا يدخل ترتيباً بين الأعداد المضروبة. وعليه فليست بنا من حاجة إلى قانون التبادل وهو الذى يهتم بالرموز ، لا بالشىء المرموز إليه كالحال فى الجمع تماماً . وثانيتهما أن التعريف المذكور لا يتطلب منا أن نقرر بالنسبة للأعداد التى نتكلم عنها ، فيما إذا كانت هذه الأعداد متناهية أو لا متناهية . ولقد وضع كانتور[٢] تعريفاً لكل من مجموع وحاصل ضرب عددين ، ودون حاجة للبحث فيما إذا كان كل من العددين متناهياً أو لامتناهياً . ويمكن أن يمتد هذان التعريفان ليشملا مجموع أو حاصل ضرب أي عدد « متناه » من الأعداد المتناهية أو اللامتناهية ، ولكنهما فى وضعهما الحالى لا يصلحان لتعريف مجموع أو حاصل ضرب عدد لا متناه من الأعداد . وهذا النقص الكبير قد عولج فى التعريفين السابقين ، وبفضلهما يمكن السير فى دراسة الحساب ، كما ينبغى ، دون التمييز بين المتناهى واللامتناهى إلى أن يحين الوقت لدراسة ذلك . وفى تعريفى كانتور أيضاً عيب شكلى بإدخالهما الترتيب على الأعداد المجموعة أو المضروبة . ولكن فى حالته هذه ، هذا مجرد عيب فى اختيار الرموز لا فى الأفكار التى ترمز لها هذه الرموز ، فضلاً عن أنه ، فى حالة مجموع أو حاصل ضرب عدد « اثنين » ، لا يكون من المرغوب فيه من

---

(١) American Journal of Mathematics, Oct. 1902.

(٢) Math. Annalen, Vol. XLVI § 3.

الناحية العملية تجنب هذا العيب الشكلى لأن التعقيد الذى ينجم عن ذلك كبير للدرجة غير محتملة .

١١٦ — ومن السهل أن نستنبط من التعريفين السابقين الصلة العادية بين الجمع والضرب ، والتى يمكن وضعها فى الصورة الآتية : إذا كان ك فصلاً مكوناً من ب من الفصول غير المشتركة ، وكل فصل منها يحتوى على ا من الحدود ، فإن المجموع المنطقى للفصل ك يحتوى على ا × ب حداً [1] . ومن السهل أيضاً إيجاد تعريف $ا^{ب}$ ، وإثبات قانونى الترتيب والتوزيع والقوانين الصورية للقوى من مثل $ا^{ب} \times ا^{ح} = ا^{ب+ح}$. ولكن يجب أن نلاحظ أن الرفع إلى القوى لا ينبغى أن يعتبر عملية مستقلة لأنها مجرد تطبيق للضرب . ومع التسليم بإمكان تعريف الرفع إلى القوى تعريفاً مستقلاً كما فعل كانتور لا نرى ميزة فى عمل كهذا . فضلاً عن أن الرفع إلى القوى لا يمكن بحال أن يستبعد أفكار الترتيب ما دام $ا^{ب}$ لا تساوى $ب^{ا}$ بصفة عامة . ولهذا السبب فنحن لا نستطيع تعريف نتيجة عدد لا نهائى من الرفع إلى القوى .

ومن أجل ذلك سننظر إلى القوى على أنها مجرد اختصار لحواصل ضرب فيها جميع الأعداد المضروبة فى بعضها متساوية .

ومن هذه المادة التى بين يدينا يمكن استنباط جميع القضايا التى تنطبق سواء على الأعداد المتناهية واللامتناهية . وخطوتنا التالية ، إذن ، هى البحث فى الفرق بين المتناهى واللامتناهى .

(١) انظر هوايتهيد ، المرجع السابق .

الباب الثالث عشر

المتناهى واللامتناهى

١١٧ – ليس من أغراضنا فى الباب الحالى أن نبحث فى الصعوبات الفلسفية المتعلقة باللامتناهى، وسنؤجل ذلك إلى الجزء الخامس . وما أرمى إليه الآن هو أن أضع باختصار النظرية الرياضية للمتناهى واللامتناهى ، كما تظهر فى نظرية الأعداد الأصلية . وهذه هى صورتها الأساسية التى لا تدانيها فى ذلك صورة أخرى . وينبغى أن يتفهمها الإنسان حتى يتمكن من أن يفسر اللانهائية الترتيبية تفسيراً مقبولاً .

ليكن ى فصلاً ما ، وليكن ىَ فصلاً يتكون بحذف حد واحد س من ى عندئذ قد يكون ى متشابهاً مع ىَ ، وقد لا يكون متشابهاً معه . فمثلاً إذا كان ى فصل جميع الأعداد المتناهية، و ىَ فصل جميع الأعداد المتناهية ما عدا الصفر فإن حدود ىَ يحصل عليها بإضافة ١ إلى كل حد من حدود ى ، وهذا يجعل الحد الواحد من ى يناظر حداً واحداً من ىَ والعكس بالعكس ، لا نترك فى ذلك حداً من أى من الفصل، ولا نأخذه مرتين. وبذلك يكون ىَ مشابهاً للفصل ى . أما إذا كان ى مكوناً من جميع الأعداد المتناهية إلى العدد ن حيث ن عدد متناه ما ، وكان ىَ مكوناً من جميع هذه الأعداد ما عدا الصفر ، فإن ىَ لا يكون مشابهاً للفصل ى – وإذا وجد حد واحد س يمكن حذفه من الفصل ى ويتبقى فصل متشابه ىَ ، فإنه من السهل إثبات أنه إذا حذف أى حد آخر ص بدلاً من س فإننا نحصل أيضاً على فصل متشابه مع ى – وعندما يمكن حذف حد من الفصل ى – ويتبقى فصل ىَ متشابه مع ى نقول: إن ى فصل « لامتناه » . وعندما لا يكون ذلك ممكناً نقول : إن ى فصل متناه . وينتج عن هذين التعريفين أن الفصل الصفرى متناه ، لأنه لا يمكن حذف حد منه ، ومن السهل إثبات أنه

إذا كان ى فصلاً متناهياً ، فإن الفصل المكون بإضافة حد واحد إلى الفصل ى يكون فصلاً متناهياً كذلك، وبالعكس إذا كان هذا الفصل الأخير متناهياً كان ى متناهياً . وينتج عن هذا التعريف أن أعداد الفصول المتناهية ، عدا الفصل الصفرى– تتغير إذا طرحنا منها ١– أما أعداد الفصول اللامتناهية فلا تتغير بمثل هذه العملية، ومن السهل إثبات أن مثل هذا صحيح بالنسبة لإضافة ١ .

١١٨ – فى الفصول المتناهية إذا كان أحدها جزءاً حقيقياً من الآخر، فإن عدد الأول أصغر من عدد الثانى (الجزء الحقيقى هو الجزء لا الكل) . وليس هذا صحيحاً بالنسبة للفصول اللامتناهية . وهذا التمييز جزء أساسى من التعريفين السابقين للمتناهى واللامتناهى ، وقد يكون أحد الفصلين اللامتناهيين له عدد أكبر أو أصغر مما للفصل الآخر . ويقال إن الفصل ى أكبر من الفصل ف ، أو أن له عدداً أكبر من عدد الفصل ف ، عند ما يكون الفصلان غير متشابهين ؛ ولكن ف متشابه مع جزء حقيقى من ى ، ومن المعلوم أنه إذا كان ى متشابهاً مع جزء حقيقى من ف ، وكان ف متشابهاً مع جزء حقيقى من ى ، وهى حالة لا تنشأ إلا إذا كان كل من ى، ف لامتناهياً، فإن ى يكون متشابهاً مع ف ، ومن ذلك ينتج أن قولنا « ى أكبر من ف » لا يتفق مع قولنا « ف أكبر من ى». ولسنا نعلم فى الوقت الحاضر أن من بين كل عددين لانهائيين يجب أن يكون أحدهما أكبر والآخر أصغر من أخيه. ولكنه من المعلوم أن هناك عدداً لامتناهياً أصغر من جميع الأعداد اللامتناهية وهذا هو عدد الأعداد الصحيحة، وسنرمز إليه بالرمز ا. ويمكن تعريف هذا العدد بعدة طرق ليس فيها ذكر الأعداد المتناهية . فى الطريقة الأولى يمكن تعريفه عن طريق قاعدة الاستنباط الرياضى (كما فعل كانتور ضمنياً) وهذا هو التعريف :

ا : هو عدد أى فصل ى يكون ميداناً لعلاقة واحد لواحد ع ميدانها العكسى مشتمل فى ى ولكنه غير متفق معه فى الامتداد not coextensive with وإذا كان بحيث ، إذا أسمينا الحد الذى له مع س العلاقة ع بتالى س ، وكان ص أى فصل يتبعه حد من حدود ى ليس بذاته تالياً لأى حد آخر من حدود ى ،

ويتبعه تالى كل حد فى ى تابع للفصل س ، كان كل حد من حدود ى تابعاً للفصل ص . ومرة أخرى يمكن تعريف ا. بالطريقة الآتية :

لنفرض أن ق علاقة متعدية لا متماثلة ، ولنفرض أن كل حدين مختلفين فى مجال ق تقوم بينهما العلاقة ق أو عكسها ، ولنفرض فوق ذلك أن أى فصل ى مشتمل فى مجال العلاقة ق ، إذا كانت له توالى (أى حدود لها مع كل حد من حدود ى العلاقة ق) فإنه يكون له تال مباشر أى حد يكون سالفه إما تابعاً للفصل ى أو سالفاً لحد ما من حدود ى ، ولنفرض أن هناك حداً واحداً من مجال العلاقة ق ليس له أسلاف ، بيد أن كل حد له أسلاف فله توابع ، وله أيضاً سالف مباشر ، عندئذ يكون عدد حدود مجال العلاقة ق هو ا. ويمكن سرد تعاريف أخرى غير ذلك ، ولما كانت جميعها متكافئة فلا حاجة بنا إلى زيادة عددها . والخاصية الآتية كبيرة الأهمية : كل فصل عدده ا. يمكن ترتيبه فى متسلسلة ذات حدود متعاقبة ، لها بداية وليست لها نهاية ، بحيث إن عدد أسلاف أى حد فى المتسلسلة يكون متناهياً ، وكل متسلسلة لها هذه الخصائص فعددها ا.

ومن السهل إثبات أن كل فصل لامتناه يشتمل على فصول عدد حدود كل منها ا. لذلك نفرض أن ى فصل لامتناه وأن س . حد من حدود ى ، وإذن فالفصل ى يكون متشابهاً مع الفصل الذى نحصل عليه بحذف الحد س . وهو الفصل الذى نسميه ى$_1$ وينتج من ذلك أن ى$_1$ فصل لامتناه ، ومن هذا الفصل نحذف حدا س$_1$ ونحصل على فصل لامتناه ى$_2$ وهكذا . فالمتسلسلة التى حدودها س$_1$ ، س$_2$ ،..... مشتملة فى ى وهى من النوع الذى له العدد ا. ، ومن هنا نسير إلى تعريف آخر للمتناهى واللامتناهى بواسطة الاستنباط الرياضى وهو ما سنشرحه حالاً .

١١٩ — إذا كان ن عدداً متناهياً ، فإن العدد الذى نحصل عليه بإضافة ١ إلى ن هو أيضاً متناه وهو مختلف عن ن . فإذا بدأنا بالصفر (٠) أمكننا تكوين متسلسلة من الأعداد بالإضافة المتتالية للعدد ١ . ويمكننا إذا أردنا أن نعرف الأعداد المتناهية بأنها تلك الأعداد التى نحصل عليها من الصفر (٠)

خطوة خطوة ، والتى تخضع للاستنباط الرياضى . أى أن فصل الأعداد المتناهية هو فصل الأعداد المشتملة فى كل فصل ص يتبعه الصفر (٠) كما يتبعه تالى كل عدد تابع ا ص ؛ والمقصود بتالى العدد ، هو العدد الذى نحصل عليه بإضافة ١ إلى العدد المعروف . والآن ا. ليس عدداً كهذا ، لأنه بحسب القضايا التى أثبتناها ، لا يمكن أن يكون عدد مثل هذا متشابهاً مع جزء من نفسه . ونخرج من هذا أن كل عدد أكبر من ا. لا يمكن أن يكون متناهياً بحسب التعريف الجديد . ولكن من السهل إثبات أن كل عدد أصغر من ا. يكون متناهياً بحسب التعريف الجديد أو القديم على السواء . وبذلك يكون التعريفان متكافئين. وعلى ذلك يمكن تعريف الأعداد المتناهية ، إما بأنها تلك التى نصل إليها عن طريق الاستنباط الرياضى عند ما نبدأ بالصفر ونزيد ١ فى كل خطوة ، أو بأنها أعداد تلك الفصول التى لا تكون متشابهة مع أجزائها التى نحصل عليها بحذف حد واحد من كل . ولما كنا نستخدم كلا من هذين التعريفين كثيراً فمن المهم أن ندرك أن كل واحد منهما ينتج عن الآخر . وسنرجع كثيراً إلى كل من هذين التعريفين فيما بعد ، ولكنا معنيون فى الوقت الحاضر بوضع مجرد الخطوط العريضة للنظرية الرياضية للمتناهى واللامتناهى ، دون أن نخوض فى الخلافات ، تاركين التفاصيل لنتولاها فى حينها فى مواضع أخرى من هذا الكتاب .

الباب الرابع عشر

نظرية الأعداد المتناهية

١٢٠ – بعد أن ميزنا بوضوح بين المتناهي واللامتناهي ، يمكن أن نبسط القول فى الأعداد المتناهية . وقد جرت العادة فى أفضل الكتب المؤلفة عن مبادئ الحساب [١] ، ألا تعرف العدد المتناهي أو الأعداد الخاصة المتناهية ، بل تبدأ ببعض البديهيات أو القضايا الأولية التى تشتق منها جميع النتائج المألوفة . وهذه الطريقة تجعل من الحساب دراسة مستقلة ، بدلا من النظر إليه كما فعلنا فى هذا الكتاب، كأنه فرع تطور عن المنطق العام دون حاجة إلى بديهيات أو لا معرفات جديدة . ولهذا السبب يبدو أن تلك الطريقة تشير إلى درجة من التحليل أقل من الطريقة التى اصطنعناها هنا . ومع ذلك سأبدأ بعرض للطريقة التى جرت العادة على استعمالها ، ثم أنتقل إلى التعريفات والبراهين التى تؤخذ عادة على أنها لا معرفات ولا مبرهنات . وسأتبع لتحقيق هذا الغرض عرض بيانو فى كتابه « فورميولير Formulaire »[٢] وهو بمقدار ما أعرف، أفضل عرض من جهة الدقة والضبط . ويمتاز هذا العرض بأنه يبين أن جميع الحساب يمكن أن يقوم على ثلاثة معان أساسية (بالإضافة إلى المعانى الخاصة بالمنطق العام). ثم خمس قضايا أساسية تتعلق بهذه المعانى. ويتبين من هذا العرض كذلك أن المعانى الثلاثة إذا اعتبرت محددة بالقضايا الخمس ، استقلت هذه القضايا عنها . ويتضح ذلك بإيجاد تفسير لكل مجموعة من أربعة قضايا يجعل القضية الخامسة باطلة . فليس أمامنا لكى نربط بين نظرية بيانو وتلك

---

(١) ما عدا كتاب فريج Grundgesetze der Arithmetik (Jena 1893)

(٢) فورميولير ١٩٠١ ، الجزء الثانى ، فورميولير ١٨٩٩ فقرة ٢٠ وما بعدها . وتختلف طبعة ١٩٠١ عن الطبعات السابقة فى أنه يجعل هذه القضية « العدد فصل » قضية أولية ، ولا ضرورة عندى لهذا التمييز ما دام منطوياً فى هذه القضية « الصفر عدد » . لهذا السبب سأتابع الطبعات الأولى .

التى اصطنعناها هنا إلا أن نعطى تعريفاً للمعانى الثلاثة الأساسية وبرهاناً على القضايا الخمس الأساسية . فإذا فعلنا ذلك ، عرفنا بكل تأكيد أن كل ما نطلب الإحاطة به خاصاً بالأعداد الصحيحة المتناهية سيترتب على ذلك .

واللامعرفات التى قال بها بيانو هى الصفر ، والعددالصحيح المتناهى ، والتالى . ومن المسلم به فيما يختص بفكرة التتالى (ولو أنى أظن أنه من الأفضل تقرير ذلك كبديهية منفصلة) أن كل عدد ليس له إلا تال واحد فقط . (والمقصود « بالتالى» طبعاً هو التالى المباشر) . وعلى ذلك قضايا بيانو الأصلية هى ما يأتى :

(١) الصفر عدد .

(٢) إذا كان ا عدداً ، فإن التالى لـ ا عدد .

(٣) إذا كان لعددين نفس التالى ، فالعددان متطابقان .

(٤) الصفر ليس تالياً لأى عدد .

(٥) إذا كان س فصلا ينتمى إليه الصفر وكذلك التالى لكل عدد ينتمى إلى س ، فيترتب على ذلك أن كل عدد ينتمى لـ س . وآخر هذه القضايا هى مبدأ الاستنباط الرياضى .

١٢١ — وقد برهن بيانو وبادوا على الاستقلال المتبادل بين هذه القضايا الخمس كما يأتى [١] : (١) إذا أعطينا المعانى العادية للصفر والتالى ، مع الدلالة على أن العدد هو الأعداد الصحيحة المتناهية ما عدا الصفر ، فإن جميع القضايا السالفة ما عدا الأولى صحيحة. (٢) إذا أعطينا المعانى العادية للصفر والتالى مع الدلالة على أن العدد إنما هو الأعداد الصحيحة المتناهية الأقل من ١٠ ، أو الأقل من أى عدد صحيح متناه معين specified ، فإن جميع القضايا السالفة ما عدا الثانية صحيحة.(٣) المتسلسلة series المتوالية التى تبدأ بدورة سابقة ثم تصبح دورية (مثال ذلك الأرقام digits فى العدد العشرى الذى يصبح دائرياً بعد عدد معين من المواضع) فإنها تحقق جميع القضايا السالفة ما عدا الثالثة . (٤) المتسلسلة الدوريةperiodic(مثل الأرقام الدالةعلى الوقت على وجه الساعة) فإنها تحقق جميع القضايا الأولية ما عدا الرابعة.(٥) إذا

(١) سأستعمل لفظ العدد فيما بقى من هذا الفصل كرادف للعدد الصحيح المتناهى .

أعطينا التالى هذا المعنى وهو المقدار الأكبر من ٢ بحيث يكون تالى الصفر ٢ ، وتالى ٢ هو ٤ وهكذا ، فإن جميع القضايا تتحقق ما عدا الخامسة ، لأنها لا تتحقق إذا كان س فصل الأعداد الزوجية بما فيها الصفر . وهكذا يتضح أن أى قضية من الخمسة لا يمكن استنتاجها من الأربعة الأخرى .

١٢٢ — ويشير بيانو إلى وجود فصول أخرى إلى جانب الأعداد الصحيحة المتناهية تحقق القضايا الخمسة السالفة ، وهذا نص أقواله: « توجد أنظمة لا نهاية لها تحقق جميع القضايا الأولية ، وهى كلها متحققة ، مثال ذلك حين نستبدل بالعدد والصفر قولنا : « العدد غير الصفر وواحد » . وجميع الأنظمة التى تحقق القضايا الأولية لها علاقة تناظر الواحد بالواحد مع الأعداد . والعدد هو ما نحصل عليه بالتجربة من جميع هذه الأنظمة؛وبعبارة أخرى: العدد هو النظام الذى له جميع الخصائص ولا غير المبينة فى القضايا الأولية » . وتبدو لى أن هذه الملاحظة تنقصها الصحة المنطقية . وأول سؤال يتبادر إلى الذهن هو : كيف تتميز الأنظمة المختلفة التى تحقق القضايا الأولية ؟ كيف مثلا يتميز النظام الذى يبدأ من ١ عن النظام الذى يبدأ من ٠ ؟ ويمكن الإجابة عن هذا السؤال بجوابين مختلفين ، فقد يمكن أن نقول إن ٠ ، ١ كليهما فكرتان أوليتان ، أو على الأقل أن ٠ فكرة أولية ، وبناء على ذلك يمكن التمييز بين ٠ ، ١ تمييزاً حقيقياً ، كما يتميز اللون الأصفر عن الأزرق . ولكننا إذا سلمنا بهذه الوجهة من النظر — والتى بهذه المناسبة يجب أن تشمل الأفكار الأولية الأخرى ، العدد والتالى — فلا بد لنا من القول بأن هذه الأفكار الثلاثة هى التى أسميها ثوابت ، ولا حاجة لأى عملية من التجريد كما يذهب بيانو فى تعريف العدد . وبمقتضى هذه الطريقة يظهر الصفر والعدد والتالى ، كاللامعرفات الأخرى ، على أنها أفكار يجب الاعتراف بها ببساطة ، وهذا الاعتراف يؤدى إلى ما يسميه الرياضيون بنظرية الوجود ، أى يؤكد لنا وجود أعداد حتماً . غير أن هذا الطريق يجعل أمر الأعداد أهى ثوابت منطقية أم لا موضع شك ، ويترتب على ذلك أنه يجعل الحساب طبقاً للتعريف المذكور فى المجلد الأول ، الباب الأول

فرعاً لأول وهلة من فروع الرياضة التطبيقية . وفضلا عن ذلك فمن الواضح أن هذا الطريق ليس هو الذى خطر ببال بيانو . أما الجواب الآخر عن هذا السؤال فيقوم على اعتبار الصفر والعدد والتالى كأنها فصل من أفكار ثلاثة تتعلق بفصل معين مكون من أمور ثلاثة معرفة بالقضايا الخمسة الأولية . ومن السهل جداً تصوير المسألة على هذا النحو بحيث تتحول القضايا الخمسة الأولية إلى تعريف لفظى لفصل معين من الثلاثيات ، وعندئذ لا تكون هناك أى لامعرفات أو لا مبرهنات فى نظريتنا التى أصبحت مجرد جزء من المنطق . ولكن الصفر والعدد والتالى تصبح متغيرات ما دام تحديدها مقتصراً على أنها ثلاثى من فصل الثلاثيات ، وفضلا عن ذلك تصبح النظرية الوجودية موضع شك ما دمنا لا نستطيع أن نعرف أتوجد مثل هذه الثلاثيات على الإطلاق ، إلا إذا اكتشفنا على الأقل ثلاثياً واحداً بالفعل من هذا الفصل . ومع ذلك فإن ثلاثياً واحداً بالفعل يكون ثابتاً ، فنحتاج لطريقة نعطى بها قيما ثابتة للصفر والعدد والتالى . الذى نستطيع بيانه هو أنه إذا وجد مثل هذا الثلاثى الواحد ، فهناك عدد لا نهاية له منها . لأن حذف الحد الأول من أيِ فصل يُحقق الشروط المطلوبة فيما يختص بالعدد ، يجعلنا نحصل دائماً على فصل يحقق مرة أخرى الشروط المذكورة . ويجب صياغة هذا القول بألفاظ مختلفة حتى لا ندور فى حلقة مفرغة ، ما دام معنى العدد لا يزال موضع نظر . وفضلا عن ذلك فعلينا أن نتساءل : هل توجد بين جميع الأنظمة التى تحقق البديهيات الخمسة ، أى عملية تجريد ، كما يتصور بيانو ، ممكنة منطقياً ؟ إن كل حد فى فصل هو حد موجود ، وهو يحقق قضية مّا تصبح باطلة حين نستبدل به حداً آخر فى الفصل . وعلى ذلك لا يوجد حد فى فصل له مجرد الخواص المعرفة للفصل دون غيره . أمّا ما يذهب إليه بيانو من عمليته التجريدية فهو اعتبار الفصل وحدوده المتغيرة واستبعاد الحدود الثابتة . ذلك أن الحد المتغير فى الفصل له وحده الخواص التى بها يعرّف الفصل . ويترتب على ذلك أن بيانو لم ينجح فى بيان أى معنى ثابت للصفر والعدد والتالى ، كما لم ينجح فى بيان إمكان أى معنى ثابت ما دامت النظرية الوجودية لم يبرهن عليها . فطريقته الوحيدة تنحصر فى قوله بأن معنى واحداً ثابتاً على الأقل

يمكن إدراكه مباشرة ، ولكن لا يمكن تعريفه . ومع أن هذه الطريقة ليست باطلة منطقياً إلا أنها مختلفة تماماً عن التجريد المستحيل الذى يقترحه . ثم إن البرهان على الاستقلال المتبادل لقضاياه الخمسة إنما يكون ضرورياً لبيان أن تعريف فصل الثلاثيات والمحدد بتلك القضايا ليس زيادة فضل . وليس الإطناب خطأ منطقياً بل هو مجرد عيب فيما يمكن تسميته بالأسلوب . لقد كان غرضى فيما ذكرته عن الأعداد الأصلية أن أثبت عن طريق المنطق العام وجود معنى واحد ثابت يحقق القضايا الخمسة المذكورة ، وأن هذا المعنى الثابت يجب أن يسمى العدد ، أو الأولى أن يسمى العدد الأصلى المتناهى . وبهذه الطريقة نتجنب بتاتاً إدخال لامعرفات ولا مبرهنات جديدة ، لأننا حين بينا أن فصل الثلاثيات المذكور له على الأقل حد واحد، وأنه قد استخدم فى تعريف العدد فيسهل بعد ذلك بيان أن فصل الثلاثيات له عدد لا نهاية له من الحدود ، ونعرف الفصل بواسطة الخواص الخمسة المذكورة فى القضايا الأصلية عند بيانو. لهذه النقطة أهمية قصوى فى فهم العلاقة بين الرياضة والمنطق ، وستعرض مثل وهذه النقط باستمرار خلال هذا الكتاب.

١٢٣ — ولكى أوضح الفرق بين طريقة بيانو وطريقتى ، سأعيد تعريف الفصل الذى يحقق قضاياه الخمسة الأصلية وتعريف العدد المتناهى والبرهان على قضاياه الأصلية الخمسة فى حالة الأخذ بالأعداد المتناهية .

إن فصل الفصول الذى يحقق بديهياته هو نفس فصل الفصول الذى يكون عدده الأصلى ا. ، أى فصل الفصول الذى يكون طبقاً لنظريتى ا. ، وتعريفه ببساطة كما يأتى : ا. هو فصل فصول ى الذى يكون ميدان علاقة الواحد بالواحد ع (علاقة حد بتاليه) بحيث يكون هناك حد واحد على الأقل لا يلى حداً آخر ، وكل حد يتوالى له تال ، ويكون ى داخلا فى أى فصل س يشتمل على حد من ى ليس له سابق ، ويشتمل أيضاً على التالى لكل حد من ى ينتمى ا س . وهذا التعريف يشتمل على قضايا بيانو الخمسة ولا غير . وهكذا فى جميع مثل هذه الفصول يمكن إثبات جميع القضايا العادية فى الحساب الخاص

بالأعداد المتناهية ، فيمكن تعريف الجمع والضرب والكسور وغير ذلك ، ويمكن إجراء التحليل بأكمله بشرط ألا نتعرض للأعداد المركبة . ولكن فى هذه العملية كلها يكون معنى الأشياء والعلاقات القائمة غير محدود إلى درجة مّا ما دامت الأشياء والعلاقة التى بها نبدأ، عبارة عن أفراد متغيرة لفصل معين. وفضلا عن ذلك لا يتبين من هذه العملية كلها وجود مثل هذه الفصول التى يزعم التعريف القول بها .

وفى النظرية المنطقية للأعداد الأصلية نبدأ من الطرف المقابل ، فنعرف أولا فصلا معيناً من الأشياء ثم نبين أن هذا الفصل من الأشياء ينتمى للفصل ا . الذى سبق تعريفه . ونحن نفعل ذلك كما يأتى :

(١) الصفر هو فصل الفصول الذى حده الوحيد هو الفصل الصفرى .

(٢) العدد هو فصل جميع الفصول المشابهة لأى فصل منها .

(٣) الواحد هو فصل جميع الفصول التى ليست صفراً والتى تكون بحيث إذا كانت س تنتمى إلى الفصل فإن الفصل الذى يخلو من س هو الفصل الصفرى ؛ أو بحيث إذا كان س ، ص ينتميان إلى الفصل فإن س ، ص متطابقان .

(٤) بعد بيان أنه إذا كان فصلان متشابهين ، وضم فصل من حد واحد إلى كل منهما ، فالمجموع متشابه ، وتعريف ذلك أنه إذا كان ن عدداً ، كان ن + ١ هو العدد الناتج من جمع وحدة للفصل ن من الحدود .

(٥) الأعداد المتناهية هى تلك التى تنتمى لكل فصل س ينتمى إليه . والتى إليها تنتمى ن + ١ إذا كانت ن تنتمى إليها . وبهذا يكمل تعريف الأعداد المتناهية .

ثم بعد ذلك نحصل فيما يختص بالقضايا الخمسة التى يقررها بيانو ما يأتى : (١) الصفر عدد . (٢) إذا كان معنى ن + ١ هو التالى لـ ن ، وكان ن عدداً كان ن + ١ عدداً . (٣) إذا كان ن + ١ = م + ١ ، فإن ن = م . (٤) إذا كان ن عدداً مّا ، كان ن + ١ مختلفاً عن ٠ (٥) إذا كان س فصلا

ما وكان ٠ داخلا فى هذا الفصل ، وإذا كان ں داخلا فيه كان ں + ١ داخلا فيه ، فإن جميع الأعداد المتناهية تدخل فيه . وهكذا فإن جميع الخواص الأساسية يحققها فصل الأعداد المتناهية كما عرفنا من قبل . ويترتب على ذلك أن فصل الفصول ا. له حدود ،وفصل العدد المتناهى هو أحد الحدود المحدودة من ا. وبناءً على ذلك لا يوجد من وجهة النظر الرياضية أى حاجة إلى لا معرفات أو لامبرهنات جديدة فى كافة الحساب أو التحليل .

الباب الخامس عشر

جمع الحدود وجمع الفصول

١٢٤ ــ بعد أن عرضنا فى إيجاز النظرية الرياضية للأعداد الأصلية ، علينا الآن أن نوجه النظر إلى المسائل الفلسفية التى تثيرها هذه النظرية . وسأبدأ ببعض الملاحظات الخاصة بالتمييز بين الفلسفة والرياضة ، ووظيفة الفلسفة فى مثل موضوع أسس الرياضيات . وليس من الضرورى أن نعتبر الملاحظات الآتية منطبقة على فروع الفلسفة الأخرى ما دامت هذه الملاحظات مستمدة بوجه خاص من النظر إلى مسائل المنطق .

التمييز بين الفلسفة والرياضة أمر يرجع بوجه عام إلى وجهة النظر : فالرياضة تركيبية وقياسية ، أما الفلسفة فإنها نقدية ، وقد يقال إنها خلافية بمعنى غير شخصى . فكلما كنا بإزاء استدلال قياسى كنا بصدد الرياضة ؛ غير أن مبادىء الاستدلال القياسى ، والتعرف على الأمور التى لا تقبل التعريف ، والتمييز بين مثل تلك الأمور ، كل ذلك من عمل الفلسفة ، التى هى فى الواقع مسألة بصيرة وبصر فى أساسها ، فالأشياء التى تدرك بما نسميها الحواس كالألوان والأصوات لا تعتبر عادة لبعض الأسباب داخلةً فى نطاق الفلسفة إلا فيما يختص بما بينها من علاقات أكثر تجريداً ، ولو أنه يبدو من المشكوك فيه التمسك بمثل هذا الاستثناء . مهما يكن من شىء فلما كان هذا الكتاب غير مختص أساساً بالأشياء المحسوسة ، ففى استطاعتنا قصر ملاحظاتنا على الأشياء التى لا تعد موجودة فى الزمان والمكان . وإذا كان لنا أن نعرف شيئاً عن مثل هذه الأمور فينبغى أن ندركها على نحو ما إدراكاً محسوساً ، وينبغى أن نميز بعضها عن بعضها الآخر ، كما يجب كذلك إدراك بعض علاقاتها إدراكاً مباشراً . ذلك أن مجموعة من اللامعرفات والقضايا اللامبرهنات يجب أن تكون نقطة البداية لأى استدلال

رياضى ، وهذه البداية هى التى تعنى الفيلسوف . وعند ما يكمل عمل الفيلسوف تماماً يمكن أن تندمج نتائج هذا العمل فى المقدمات التى يرتكز عليها الاستدلال. ويترتب على طبيعة هذا البحث نفسه أن النتائج قد تنقض ولكن لا يمكن إثباتها أبداً . ويقوم النقض على إبراز ما يوجد من متناقضات وعدم اتساق ، ولكن غياب هذه المتناقضات وعدم الاتساق لا يرتفع إلى مقام البرهان . وبذلك يعتمد كل شىء فى نهاية الأمر على الإدراك المباشر المحسوس ، وتقوم الحجة الفلسفية بوجه الدقة على دفع القارئ إلى إدراك ما أدركه المؤلف من قبل . صفوة القول ليست الحجة من طبيعة البرهان بل من طبيعة الدفاع . وبذلك يكون السؤال فى هذا الباب هو ما يأتى : أتوجد ثمة أى مجموعة من الأشياء اللامعرفة التى تسمى عادة أعداداً تختلف عن مجموعة الأشياء المعرفة سابقاً ؟ هذا سؤال فلسفى فى أساسه الفصل فيه بالفحص أولى منه بالاستدلال المتسلسل الدقيق .

١٢٥ — سنفحص فى هذا الباب عن هذه المسألة وهى : هل التعريف المذكور آنفاً عن الأعداد الأصلية يفترض مقدماً بأى حال معانى للعدد أكثر أساسية . وهناك طرق عدة تجعلنا نفترض أن الأمر كما ذكرنا . فأول كل شىء الأفراد التى تؤلف الفصول يبدو أن كلا منها من بعض الوجوه « واحد » ، وقد يظن أن علاقة الواحد بالواحد لا يمكن أن تعرف دون إدخال العدد ١ . ومن جهة أخرى قد نتساءل أيمكن التمييز بين فصل ذى حد واحد وبين هذا الحد الواحد . ومن جهة ثالثة قد يقال إن معنى « الفصل » يفترض العدد ، بمعنى يختلف عن ذلك المعرف سابقاً : فقد يقال إن الفصول تنشأ من جمع الأفراد كما تشير إلى ذلك لفظة « الواو » ، وأن الجمع المنطقى للفصول تابع لهذا الجمع للأفراد . وتحتاج هذه الأسئلة إلى بحث جديد فى معنى « الواحد » « والفصل » وإنى لأرجو أن تعيننا هنا النظريات التى بسطناها فى الجزء الأول .

أما فيما يتعلق بأن أى فرد أو أى حد فهو من بعض الوجوه « واحد » فلا ريب أن هذا أمر غير منكور ، ولكن لا يترتب على ذلك أن معنى « الواحد » مفروض عند ما نتكلم عن الأفراد ، بل لعله على العكس معنى

الحد أو الفرد هو المعنى الأساسى الذى يشتق منه معنى « الواحد » . وقد أخذنا بهذه الوجهة من النظر فى الجزء الأول ، ولا يبدو أن ثمة أى سبب لاستبعادها . أما علاقات الواحد بالواحد فإنها معرفة بواسطة التطابق دون أي ذكر « للواحد » ، وذلك كما يأتى : ع علاقة واحد بواحد إذا كانت س ، س َ لهما العلاقة ع بـ ص ، وكانت س لها العلاقة ع لـ ص ، ص َ ، فإن س ، س َ متطابقان وكذلك ص ، ص َ . حقاً هنا نجد أن س ، ص ، س َ ، ص َ كل منها حد « واحد » ، ولكن ذلك (فيما يبدو) غير مفروض فى التعريف . وبهذا نحل أول الاعتراضات المذكورة سابقاً (مع الاحتفاظ ببحث جديد فى طبيعة الفصول)

والسؤال الثانى يتصل بالتمييز بين الفصل الذى يشتمل على حد واحد وبين الحد الواحد الذى يشتمل عليه . ولو أمكننا أن نطابق بين الفصل وبين محموله المعرِّف أو فصل تصوره فلا صعوبة تنشأ من هذه النقطة . فحين يتعلق محمول معين بحد واحد ليس غير ، فمن الواضح أن ذلك الحد ليس متطابقاً بالمحمول المذكور . ولكن إذا تعلق محمولان بحدين بالذات ، فلنا أن نقول : إنه ولو أن المحمولين مختلفان فالفصلان اللذان يعرفانهما متطابقان ، أى ليس هناك إلا فصل واحد يعرفهما معاً . مثال ذلك : لو كان جميع عراة الريش الماشين على قدمين ناس ، وكان جميع الناس عراة الريش ماشين على قدمين ، فالفصلان « الناس » ، و « عارى الريش . ماش على قدمين » متطابقان ، على الرغم من أن الإنسان يختلف عن عارى الريش يمشى على قدمين . وهذا يبين أن الفصل لا يمكن أن يتطابق مع فصل تصوره أو محموله المعرِّف . فقد يبدو أنه ليس أمامنا إلا الحدود الفعلية بحيث إذا لم يكن هناك إلا حد واحد كان ذلك الحد متطابقاً مع الفصل . ومع ذلك فهذه الوجهة من النظر لا يمكن لأسباب كثيرة صورية أن تعطى معنى الرموز المقابلة للفصول فى المنطق الرمزى . مثال ذلك : خذ فصل الأعداد التى حين تجمع على ٣ تعطى ٥ ، فهذا فصل لا يشتمل على حدود سوى العدد ٢ ، ولكن يمكننا أن نقول إن ٢ حد لهذا الفصل ، أى له بالفصل تلك العلاقة الخاصة التى لا تقبل التعريف والتى توجد بين الحدود

وبين الفصول التى تشتمل عليها . ويبدو أن هذا يدل على أن الفصل مختلف عن الحد الواحد . وهذه النقطة فى غاية الأهمية فى منطق « بيانو » الرمزى وترتبط بتمييزه بين علاقة الفرد بفصله وعلاقة الفصل بالفصل الآخر الذى يشمله . وهكذا فإن فصل الأعداد التى عند ما تجمع على ٣ تعطى ٥ داخل فى فصل الأعداد ولكنه ليس عدداً ، على حين أن ٢ عدد ، ولكنه ليس فصلا داخلا فى فصل الأعداد . وإذا طابقنا بين العلاقتين اللتين يميز « بيانو » بينهما لكان ذلك سبباً فى هدم نظرية اللانهاية ، والإخلال بالدقة الصورية لكثير من الأدلة والتعاريف . ويبدو فى الواقع مما لا ريب فيه أن تمييز « بيانو » فى محله ، ويبقى أن نبحث عن طريقة ما للتمييز بين الحد وبين الفصل الذى يشتمل على ذلك الحد ولا غير .

١٢٦ – ولكى نحسم القول فى هذه النقطة يجب الانتقال إلى الصعوبة الثالثة فنعيد النظر فى معنى « الفصل » نفسه . ويظهر أن هذا المعنى مرتبط بمعنى « الدلالة » : الذى شرحناه فى الجزء الأول الباب الخامس، حيث أشرنا إلى طرق خمسة للدلالة : إحداها التى سميناها «العطف العددي» وهو النوع المعبر عنه بلفظة « جميع » . وهذا النوع من العطف يظهر أنه هو الداخل فى حالة الفصول . مثال ذلك : إذا كان « الإنسان » هو فصل التصور فإن « جميع الناس » هو الفصل ، ولكن ليس « جميع الناس » من حيث إنه تصور هو الذى سيكون الفصل ، بل ما يدل عليه هذا التصور ، أى الحدود المعينة المجتمعة هذا الاجتماع الخاص بلفظة « جميع » . وطريقة اجتماعها أساسية ما دام « أى إنسان » أو « بعض الناس » من الواضح أنه ليس الفصل ، ولو أن كلا منهما يدل على اجتماع للحدود ذاتها . وقد يبدو أنه إذا طابقنا بين الفصل وبين العطف العددى لحدوده فيجب أن ننكر التمييز بين الحد وبين الفصل الذى حده الوحيد هو ذلك الحد . ولكننا قد تبين لنا فى الباب العاشر أن الفصل يجب أن يكون دائماً شيئاً مختلفاً فى نمطه المنطقى عن حدوده ، وأنه لكى نتجنب هذه القضية س ε س ، يجب أن يمتد هذا المذهب ليشمل حتى الفصول التى ليس لها إلا حد واحد .

وليس فى استطاعتى أن أقرر إلى أي حد يمعننا هذا من المطابقة بين الفصول وبين العطف العددى ، وعلى أي حال لا بد من التمييز بين الحد وبين الفصل الذى حده الوحيد هذا الحد . ومع ذلك فلا بد من أخذ الفصول من ناحية الماصدق إلى الدرجة التى تتدخل فيها هذه الماصدقات وتجعلها محددة حين تعطى حدودها . ويسمى « فريج » مثل هذه الفصول Werthverlaüfe ، وعلينا أن نعتبر الأعداد الأصلية كفصول بهذا المعنى .

١٢٧ — بقيت بعد ذلك صعوبة لا تزال قائمة وهى : يبدو أن الفصل ليس حدوداً كثيرة ، بل إنما هو نفسه حد وحيد ، حتى حين يكون هناك حدود كثيرة فى الفصل . ويبدو أن هذه الصعوبة تدل على أن الفصل لا يمكن أن يتطابق مع جميع حدوده ، بل الأولى أن يعد كالكل الذى يتألف منه . ومع ذلك فلكى نقرر الصعوبة بطريقة لا اعتراض عليها يجب أن نستبعد الوحدة والكثرة من تقريرها ما دمنا نعرف هاتين الفكرتين بواسطة معنى الفصل . ويحسن بنا أن نوضح نقطةً قد تستوقف نظر القارئ . هل فكرة « الواحد one » مفروضة كلما تكلمنا عن « أحدَ الحدود a term »؟ قد يقال إن « حداً مَّا a term » (١) يعنى حداً واحداً ، وبذلك لا يمكن أن نصوغ عبارةً عن حد دون افتراض أنه « الواحد » . وهذه القضية لا نزاع فيها فيما يختص ببعض معانى « الواحد » . فكل ما هو موجود فهو واحد ، فالموجود والواحد ، كما لاحظ « ليبنتز » ، حدان ينعكسان (٢) . ومن العسير أن نتأكد إلى أى حد تكون هذه العبارات مجرد عبارات نحوية ، لأنه إن صح أن كل ما هو موجود فهو واحد ، فكذلك كل ما هى موجودات ، فهى كثيرة . ولكن الحقيقة تبدو فى أن نوع الشىء الذى هو فصل ، أى نوع الشىء الذى ندل عليه بقولنا : « جميع الناس » أو بأي تصور لفصل ، ليس « واحداً » إلا حيث يكون للفصل

---

(١) ننبه القارئ إلى الصعوبة فى نقل هذا الاصطلاح على وجه الدقة إلى اللغة العربية وهو "a" term ولهذا السبب وضعنا الأصل الذى يقابله (المترجم)

(٢) Ed. Gerhardt, II, p. 300

حد واحد فقط ، ولا يجب أن يجعل موضوعاً منطقياً واحداً . هناك كما قلنا فى الجزء الأول الباب السادس فى الأحوال البسيطة حد وحيد مترابط هو الفصل ككل ، ولكن هذه الحالة قد لا تحصل فى بعض الأحيان ، وهى على كل حال ليست متطابقة مع الفصل ككثير . ولكن فى هذه النظرية لا يوجد تناقض كما هى الحال فى نظرية أن الأفعال والصفات لا يمكن أن تُجعل موضوعات . ذلك أنه يمكن أن نحكم أحكاماً على الفصول ككثير ، ولكن موضوع هذه الأحكام كثير وليس واحداً فقط كما هى الحال فى الأحكام الأخرى. خذ مثلاً : « محمد وعلى اثنان من خطاب الآنسة ليلى » فهذا حكم يدور حول الفصل « محمد وعلى » ، ولكن لا على هذا الفصل باعتبار أنه حد واحد . وهكذا فإن « الواحدية one-ness » تتعلق فى هذه النظرية بنمط معين من الموضوعات المنطقية ، ولكن الفصول التى ليست واحدة قد يقال عليها مع ذلك أحكام . ونخلص من ذلك أن الواحدية لازمة ولكنها ليست مفروضة فى التقريرات التى تدور حول حد ، على أن نعتبر الحد مما لا يقبل التعريف .

١٢٨ — ومع ذلك يبدو من الضرورى أن ندخل تمييزاً فيما يتصل باستخدام « الواحد » . فالمعنى الذى يكون بمقتضاه كل شىء « واحداً » ، وهو ما يدخل فى قولنا عن « شىء ما an object » ، هو كما يذهب إليه « فريج[1] » من المعانى المبهمة جداً ، من حيث انطباقه على كل شىء على حد سواء . أما المعنى الذى يقال عن الفصل إنه يشتمل على حد واحد فهو معنى دقيق تماماً . فالفصل ى له حد واحد حين لا يكون ى صفراً ، وقولنا : « سه ، صه ياءات » يستلزم أن « سه متطابق مع صه » . هنا نجد أن الواحدية خاصة للفصل الذى يمكن أن يسمى عندئذ بفصل الوحدة unit-class . ويمكن أن يكون أ ل سه الذى هو حده الوحيد فصلا له حدود كثيرة ، مما يدل على أن معنى « الواحد » الداخل فى قولنا « حد واحد » أو « حد ما » ليس صحيحاً فى الحساب ، إذ أن كثيراً من الحدود من حيث هى كذلك ، قد تكون حداً منفرداً لفصل فصول . فالواحد

(١) Grundlagen de Arithmetik, Breslau, 1884, p, 40,

لا يجب أن يقال على حدود ، بل على فصول لها حد واحد بالمعنى المذكور آنفاً؛ مثال ذلك « ى واحد » أو الأفضل قولنا « ى وحدة » يعنى : « ى ليس صفراً » و « س ، ص ياءان » يستلزم أن « س ، ص متطابقان » . وفى هذه الحالة يكون عدد ى إما لا شيء، أو واحداً، أو كثيراً إذا كان ى فصل فصول ، ولكن إذا كان ى فصل حدود ، فإن عدد ى لن يكون لا شيء ولا واحداً ولا كثيراً ، بل بكل بساطة حداً ما .

١٢٩ — إن النظرية السائدة التى وصلت إلينا فيما يختص بالأعداد المتناهية ، هى أنها نتيجة العد ، أو كما يؤثر بعض الفلاسفة فى قولهم إنها نتيجة التركيب . ومما يؤسف له أن الذين يذهبون إلى هذه النظرية لم يحللوا فكرة العد ، فلو أنهم فعلوا ذلك لرأوا أنها فى غاية التعقيد ، وأنها تفترض من قبل الأعداد ذاتها التى يفترضون توليدها .

ولا ريب أن لعملية العد مظهراً نفسانياً ، غير أن هذا المظهر بعيد تماماً عن نظرية الحساب . والذى أريد بيانه الآن هو العملية المنطقية الداخلة فى فصل العد ، وهى كما يأتى : حين نقول : واحد ، اثنين ، ثلاثة ، إلخ ، فنحن نعتبر بالضرورة علاقة واحد بواحد تقوم بين الأعداد المستخدمة فى العد وبين الأشياء المعدودة . فالذى نعنيه بقولنا : « واحد ، اثنين ، ثلاثة » هو أن الأشياء المشار إليها بهذه الأعداد هى نظائرها بالنسبة إلى العلاقة الموجوده فى أذهاننا . (وبهذه المناسبة نقول إن هذه العلاقة شديدة التعقيد عادة ، وهى عرضة للتأثر بحالتنا العقلية فى وقت العد) . وهكذا نحن نربط بين فصل من الأشياء وبين فصل من الأعداد ، ويشتمل فصل الأعداد على جميع الأعداد من ١ إلى عدد ما هو ن . والاستدلال المباشر الوحيد الذى يستنتج من هذا الارتباط هو أن عدد الأشياء هو نفس عدد الأعداد من ١ إلى ن . ثم نحتاج إلى عملية أخرى لبيان أن عدد الأعداد هو ن إنما يكون صحيحاً فى الواقع حين تكون ن متناهية ، أو بمعنى آخر أوسع ، حين تكون ن هى ا . (أى أقل الأعداد اللامتناهية) . وفضلاً عن ذلك فإن عملية العد لا تعطينا أى إشارة إلى الأعداد

ما هي ، ولماذا تكوّن سلسلةً ، وكيف نبرهن على وجود ىه من الأعداد ، من ١ إلى ىه (هذه البرهنة فى الأحوال التى تكون فيها صحيحة) . من أجل ذلك كان العد غير داخل فى أساس الحساب، ولهذا يمكن أن نستبعده حتى نبحث الترتيب والأعداد الترتيبية .

١٣٠ — ولنرجع إلى فكرة العطف العددى . فمن الواضح أن الأشياء مثل « ا و ب » ، « ا و ب و حـ » هى التى استوجبت الحكم عليها بأعداد غير الواحد . وقد فحصنا أمر هذه الأشياء فى الجزء الأول بصدد علاقتها بالفصول فرأينا أنها متطابقة . وعلينا الآن أن نفحص عن علاقتها بالأعداد والكثرة .

والفكرة التى علينا الآن الفحص عنها هى فكرة العطف العددى ، أو بالاختصار « المجموعة Collection » . ولنبدأ بقولنا إن هذه الفكرة لا يجب أن تكون مطابقة لفكرة الفصل ، بل يجب أن نبحث عنها بحثاً جديداً مستقلاً . وأعنى بالمجموعة ما يحمله قولنا : « ا و ب » أو « ا و ب و حـ » أو أى سرد آخر لحدود معينة . وتعرف المجموعة بذكر الحدود بالفعل ، وترتبط الحدود بلفظة « الواو » . وقد يبدو أن « الواو » تمثل طريقة أساسية لربط الحدود ، بحيث نذهب إلى أن هذه الطريقة للربط بالذات جوهرية إذا شئنا الحصول على نتيجة من الحكم بالأعداد غير الواحد . والمجموعات لا تفترض الأعداد ما دامت تنتج عن مجرد جمع الحدود « بالواو » ، وإنما تفترض الأعداد فى حالة خاصة تكون حدود المجموعة نفسها أعداداً مفروضة . وثمة صعوبة نحوية لا بد من الإشارة إليها وتفسيرها ما دامت ليس هناك طريقة لتجنبها . فالمجموعة نحوياً شيء واحد، على حين أن ا و ب ، أو ا و ب و حـ كثيرون أساسياً . إن المعنى الدقيق للمجموعة هو الكل المركب من كثيرين ، ولكن ما دمنا فى حاجة إلى لفظة تدل على الكثيرين أنفسهم فإنى أوثر استخدام لفظة « المجموعة » فى هذا المعنى بحيث تكون المجموعة ، طبقاً لهذا الاستعمال الذى نأخذ به هنا ، هى الكثير لا الواحد .

أما فيما يختص بالمقصود من الربط المعين بالواو ، فهذا الربط يعطى ما سبق أن سميناه بالعطف العددى . فإن ا و ب هما ما يدل عليهما تصور فصل

ا و ب هما حداه الوحيدان ، ويدل عليهما بالطريقة المشار إليها بلفظة «جميع» . ويمكن أن نقول : إذا كانت ى فصل التصور المناظر لفصل ا ، ب حداه الوحيدان ، فإن « جميع الياءات » عبارة عن تصور يدل على الحدين ا ، ب مجتمعين بطريقة معينة ، و ا و ب هما ذلك الحدان المجتمعان بتلك الطريقة ذاتها. وهكذا يظهر أن ا و ب لا يتميزان عن الفصل ، ولو أنهما متميزان عن فصل التصور وتصور الفصل . وبناء على ذلك إذا كان ى فصلاً له أكثر من حد واحد ، فقد يبدو من الضرورى ألا يكون ى واحداً بل كثيراً، ما دام ى متميزاً عن كل من فصل التصور وعن الكل المركب من حدود ى[1] . وهكذا نرجع إلى اعتماد الأعداد على الفصول . وحيث لا يقال إن الفصول المذكورة متناهية ، فمن الضرورى عملياً أن نبدأ بفصول التصورات ونظرية الدلالة لا بنظرية « الواو » التى بسطناها الآن . ونظرية « الواو » إنما تنطبق عملياً على الأعداد المتناهية ، وتعطى لهذه الأعداد مركزاً يختلف ، على الأقل من الناحية النفسية ، عن الأعداد غير المتناهية . صفوة القول توجد طريقتان لتعريف الفصول المتناهية الخاصة ، ولكن لا يوجد إلا طريقة واحدة عملية لتعريف الفصول غير المتناهية الخاصة ، أى بالمفهوم . ومن المألوف عادة اعتبار الفصول أساساً من جهة الماصدق ، مما وقف حتى الآن حجر عثرة فى طريق أى نظرية منطقية صحيحة للانهاية .

١٣١ — ولا بد من ملاحظة أن الجمع ليس فى الأصل طريقة لتكوين الأعداد ، بل لتكوين الفصول أو المجموعات . فلو جمعنا ب إلى ا فلن نحصل على العدد ٢ ، بل نحصل على ا و ب ، أى مجموعة من حدين ، أو زوج . ويعرف الزوج كما يأتى : ى زوج إذا كان ي له حدود ، وإذا كان س حداً ل ى ، وكان هناك حد ل ى يختلف عن س . ولكن إذا كان س ، ص

---

(١) هناك سبب حاسم يعارض تطابق الفصل مع الكل المركب من حدوده ، وهو أن أحد هذه الحدود قد يكون الفصل نفسه كما فى حالة : « الفصل هو الفصل » أو « الفصول إحدى الفصول » . والطراز المنطقى لفصل الفصل أنه ذو ترتيب لا نهاية له ، ولذلك لا ينطبق الاعتراض العادى وهو « س ع س » على هذه الحالة .

حدين مختلفين ا ى ، وكل هـ يختلف عن سـ ، صـ ، فإن كل فصل يشتمل على هـ يختلف عن ى. وفى هذا التعريف لم يرد إلا الاختلاف مع الفصل ذى الحدود . وقد يعترض ولا شك أننا يجب أن نأخذ حدين فقط هما سـ، صـ فى التعريف المذكور، ولكن الواقع أن أي عدد متناه يمكن تعريفه بالاستقراء دون إدخال أكثر من حد واحد . لأنه إذا عرفنا ن ، فإن الفصل ى له ن + ١ من الحدود، عند ما تكون عدد حدود ى المختلفة عن سـ موجودة فى ن ، إذا كان سـ حداً من حدود ى . ونحصل على معنى حاصل الجمع الحسابى ن + ١ من حاصل الجمع المنطقى لفصل له ن من الحدود، وفصل له حد واحد . فحين نقول ١ + ١ = ٢، ليس ممكناً أن نعنى ١ و ١ ، إذ إنما يوجد ١ فقط . فإذا أخذنا ١ على أنه فرد ، كان ١ و ١ لا معنى له ، على حين إذا أخذناه على أنه فصل انطبقت عليه قاعدة المنطق الرمزى وهى أن ١ و ١ هو ١ . وهكذا فى القضية المنطقية المناظرة، عندنا من جهة حدود يمكن أن نحكم فيها على ١، ومن جهة أخرى عندنا زوج. وبيان ذلك أن ١ + ١ = ٢ يعنى : « حد واحد وحد واحد هما حدان » أو إذا عبرنا عن القضية فى صيغة المتغيرات: « إذا كان ى له حد واحد ، وب له حد واحد ، وكان ى مختلفا عن ب ، فحاصل جمعهما المنطقى له حدان» . ويجب ملاحظة أننا من جهة عندنا عطف عددى للقضايا ، ومن الجهة الأخرى عندنا قضية تتعلق بالعطف العددى للحدود . ولكن المقدمة الصحيحة فى القضية المذكورة ليس عطف القضايا الثلاثة بل حاصل ضربهما المنطقى . ومع ذلك فليس لهذه النقطة إلا أهمية بسيطة فى موضوعنا .

١٣٢ – لا تبقى إذن إلا هذه النقطة وهى: هل معنى الحد يفترض معنى ١؟ فقد رأينا أن جميع الأعداد خلا الصفر تتطلب فى تعريفها معنى حد ماً فإذا كان هذا المعنى يتطلب بدوره معنى ١ ، أصبح معنى ١ دائرياً ، فلا بد أن نسلم بأن يكون ١ مما لا يقبل التعريف. وقد أجبنا عن هذا الاعتراض الموجه لعمليتنا بالمذهب المبسوط فى « بند ١٢٨»، وبيانه أن حداً ما ليس واحداً بالمعنى الداخل فى الحساب ، أو بالمعنى المقابل « للكثير » . حقاً معنى « أى حد » هو

من اللامعرفات المنطقية المفروضة فى الحقيقة الصورية وفى نظرية المتغير بأكملها ؛ ولكن معنى أى حد يختص بالعطف المتغير للحدود ، والتى لا يدخل فيها العدد ١ بأى حال. فلا يوجد إذن أى دور فى تعريف العدد ١ بواسطة معنى حد مَّا a term أو أى حد any term

الخلاصة : الأعداد فصول فصول ، أى فصول جميع الفصول المشابهة لفصل معطى . وهنا يجب أن تفهم الحدود على معنى العطف العددى فى حالة الفصول ذات الحدود الكثيرة . ولكن قد لا يكون للفصل حدود ، كما أن الفصل ذا الحد الواحد يكون متميزاً عن هذا الحد ، ولذلك فالفصل ليس مجرد حاصل جمع حدوده . والفصول وحدها لها أعداد . وليس صحيحاً أن يقال عما يسمى عادة بشىء واحد إنه واحد ، على الأقل على المعنى المطلوب ، كما يظهر من أن الشىء قد يكون فصلا له حدود كثيرة . ويبدو أن قولنا « شىء واحد » إنما يعنى فقط « موضوعاً منطقياً فى قضية مَّا » . ولا يجب أن تعتبر الأعداد المتناهية متولدة عن العد الذي على العكس هو الذي يفترضها . والجمع هو فى الأصل جمع منطقى ، أولا للقضايا ، ثم للفصول التى يشتق منها الجمع فى الحساب فيما بعد . ويتوقف تقرير الأعداد على أن الفصل الذى له حدود كثيرة يمكن أن يكون موضوعاً منطقياً دون أن يكون واحداً حسابياً . وهكذا يتضح عدم وجود برهان فلسفى ، يستطيع إبطال النظرية الرياضية الخاصة بالأعداد الأصلية، كما بيناها فى الأبواب من الحادى عشر إلى الرابع عشر .

الباب السادس عشر

الكل والجزء

١٣٣ — من الضروري لفهم التحليل أن نفحص عن معنى الكل والجزء ، وهو معنى اتشح بالغموض — ولو أن ذلك بسبب كثير أو قليل من الأسباب المنطقية الوجيهة— بسبب الكتّاب الذين يمكن تسميتهم بوجه الإجمال بالهيجليين. وسأبذل جهدي في هذا الباب أن أعرض نظرية مستقيمة لا غموض فيها عن هذا الموضوع ، صارفاً النظر عن المجادلات ما أمكن إلى ذلك سبيلا . وأود أن أشير في بداية هذا البحث أنني سأستخدم لفظ « الكل » بمعنى مترابط بوجه الدقة مع « الجزء » ، بحيث لا يسمى شيء كلا إلا إذا كان له أجزاء . وعلى ذلك لن تسمى الحدود البسيطة كالنقط ، واللحظات ، والألوان ، أو التصورات الأساسية في المنطق ، كلات .

والحدود التي ليست بفصول قد تكون كما رأينا في الباب السابق على نوعين : الأول منها هي البسيطة التي يمكن أن تتميز ، ولو أنها لا تعرف ، بأن القضايا التي تحكم على وجود مثل هذه الحدود ليس لها مفروضات presuppositions . والنوع الثاني من الحدود التي ليست بفصول هي المركبة، وفي هذه الحالة يفترض وجودها وجود حدود أخرى معينة . وكل ما ليس فصلا يسمى «وحدة unit »، وبذلك تكون الوحدات إما بسيطة أو مركبة . والوحدة المركبة « كل » ، وأجزاؤها وحدات أخرى — بسيطة كانت أم مركبة — مفروضة فيها . وهذا يوحي بإمكان تعريف الكل والجزء بواسطة التقدم المنطقي، وهذا اقتراح ولو أنه يجب استبعاده في النهاية إلا أنه من الضروري بحثه في أطناب.

١٣٤ — وحيث يكون ثمة لزوم صوري من جهة واحدة فقد نذهب إلى أنه إذا أمكن الحصول على دالتي القضيتين الواحدة من الأخرى بتغيير جزء

واحد فقط ، فإن اللازم أبسط مما يلزم عنه . مثال ذلك : « سقراط إنسان » يلزم عنه أن « سقراط فان » ، ولكن القضية الثانية لا تستلزم الأولى . وكذلك فإن القضية الثانية أبسط من الأولى من حيث إن « الإنسان » تصورٌ « الفانى » جزء منه . ثم إذا أخذنا قضية تحكم بعلاقة بين شيئين ا و ب ، فإن هذه القضية تستلزم وجود ا ، ووجود ب ، ووجود العلاقة ، ولا شىء من هنا يستلزم القضية وكل منها أبسط من القضية . وإنما يكون هناك مساواة فى التركيب طبقاً للنظرية القائلة بأن المفهوم والماصدق يتغيران تغيراً عكسياً الواحد بالنسبة للآخر — فى حالات اللزوم المتبادل ، مثل « ا أكبر من ب » و « ب أصغر من ا » . ولعل هذا يغرينا بوضع التعريف الآتى : يقال إن ا جزء من ب حين تكون ب موجودة فتستلزم وجود ا ولكن وجود ا لا يستلزم وجود ب . فإذا أمكن التسليم بهذا التعريف ، فلن يكون الكل والجزء لامعرفين جديدين ، بل يشتقان من التقدم المنطقى Priority . ومع ذلك فهناك من الأسباب ما يدعو إلى تهافت هذا الرأى .

والاعتراض الأول هو أن التقدم المنطقى ليس علاقة بسيطة . حقاً اللزوم بسيط ، ولكن التقدم المنطقى لـ ا على ب لا يحتاج إلى أن تكون « ب يلزم عنها ا » فقط ، بل أيضا « ا لا يلزم عنها ب » (وللتيسير سأقول إن ا يلزم عنها ب حين توجد ا فيلزم عنها وجود ب).من الصحيح أن هذا الأمر يتحقق حين يكون ا جزءاً من ب ، ولكن يبدو من الضرورى أن نعتبر علاقة الكل بالجزء كشىء بسيط لا بد أن يكون مختلفاً عن أي علاقة ممكنة لكل مع كل آخر ليس جزءاً منه . ولا ينتج ذلك من التعريف المذكور . خذ مثلا : « ا أكبر وأحسن من ب » يلزم عنها أن « ب أصغر من ا » ، ولكن عكس اللزوم ليس صحيحاً ؛ ومع ذلك فإن القضية الثانية ليست جزءاً من الأولى .

واعتراض آخر مستمد من أحوال كالحمرة واللون . فقد يبدو أن هذين التصورين متساويان فى البساطة : فلا تخصيص سوى الحمرة نفسها وأبسط منها يمكن أن تضاف إلى اللون لتحدث الحمرة ، بالطريقة التى يضاف بها هذا التخصيص وهو « فان » فيجعل « الإنسان » إنساناً . وعلى ذلك فقولنا :

«أحمر» ليس بأكثر تركيباً من قولنا « ا ملون» ، ولو أن هنا لزوماً من جهة واحدة . الواقع يظهر أن الحمرة تصور بسيط (إذا أخذت على معنى لون واحد معين) الذى وإن كان يستلزم اللون إلا أنه لا يحتوي على اللون كمكوّن من مكوناته . لذلك نرى أن العلاقة العكسية بين الماصدق والمفهوم لا تصح فى جميع الأحوال . ولهذه الأسباب ينبغى أن نستبعد محاولة تعريف الكل والجزء على الرغم من صلتهما الوثيقة بواسطة اللزوم .

١٣٥ — بعد أن فشلنا فى تعريف الكلات بالتقدم المنطقى ، فلا أحسب فى استطاعتنا تعريفها أصلا . فقد يبدو أن علاقة الكل بالجزء علاقة أولية لا تقبل التعريف ، أو قل إنها عدة علاقات مختلطة فى الغالب وإحداها على الأقل لا تقبل التعريف . وعلينا مناقشة علاقة الجزء بالكل مناقشة تختلف باختلاف طبيعة كل من الكل والأجزاء . ولنشرع ببحث أبسط الحالات ثم نرتفع شيئاً فشيئاً إلى الأكثر تعقيداً .

(١) كلما كان عندنا مجموعة مّا ذات حدود كثيرة بالمعنى الذى شرحناه فى الباب السابق ، فإن تلك الحدود تكوّن معاً كلاً ، بشرط وجود دالة قضية غير تربيعية تحققها جميع تلك الحدود . وقد اعتبرنا فى الباب السابق الفصل مكوناً من جميع الحدود ، ولكن يبدو أن الاستعمال لا يشير إلى أى سبب من أجله لا يعتبر الفصل كذلك مكوناً من الكل المركب من جميع الحدود فى الأحوال التى يوجد فيها مثل ذلك الكل . وأولى تلك الأحوال الفصل ككثير ، والثانية الفصل كواحد ، وفى هاتين الحالتين كل حد له إلى الكل علاقة معينة لا تقبل التعريف[1] ، وهى من جملة معانى الكل والجزء . فالكل فى هذه الحالة ، هو كل من نوع خاص سأسميه الجملة aggregate وتختلف الجملة عن الكلات من الأنواع الأخرى بأنها تكون مُعَيَّنة طالما عرفت مكوناتها .

(١) وقد تؤخذ إذا شئنا كما يذهب بيانو بهذا الرمز ع . والاعتراض على معنى ع هو أنه ليس كل دالة قضية تعرف كلا من النوع المطلوب . فالكل يختلف عن الفصل ككثير بأنه من نفس الطراز كحدوده .

(٢) ولكن العلاقة السابقة إنما تقوم بين الجملة والحدود الوحيدة للمجموعة التى تكوّن الجملة ، فالعلاقة بين هذه الجملة وبين الجمل المشتملة على بعض دون جميع حدود هذه الجملة هى علاقة مختلفة ، ولو أنها أيضاً يمكن أن تسمى عادةً علاقة الجزء بالكل . مثال ذلك علاقة الأمة اليونانية بالجنس البشرى فإنها مختلفة عن علاقة سقراط بالجنس البشرى . وعلاقة كل الأعداد الأولية بكل الأعداد مختلفة عن علاقة العدد ٢ بكل الأعداد . ويرجع هذا التمييز الهام إلى بيانو[1] . ويمكن تعريف علاقة الجملة التابعة لجملة أخرى تشتمل عليها ، كما شرحنا فى المجلد الأول ، بواسطة اللزوم والنوع الأول من علاقة الجزء بالكل . فإذا كان ى ، هـ جملتين ، وكان لكل قيمة من قيم س « س هى ى » يلزم عنها « س هى هـ » إذن ى جزء خاص (بالمعنى الثانى) من هـ ، بشرط عدم قيام عكس اللزوم . فهذا المعنى للكل والجزء من المعانى المشتقة والمعرفة .

(٣) ولكن هناك نوع آخر من الكل يمكن أن يسمى « الوحدة unity » ومثل هذا الكل يكون دائماً قضيةً ، ولو أنه ليس من الضرورى أن تكون قضية محكوماً بها «حملية» asserted .مثال ذلك : « ا يختلف عن ب » أو « اختلاف ا عن ب » عبارة عن مركب أجزاؤه هى ا ، ب ، الاختلاف . ولكن هذا المعنى الخاص بالكل والجزء يختلف عن المعانى السابقة ما دامت « ا يختلف عن ب » ليست جملة ، وليس لها أجزاء على الإطلاق بمقتضى المعنيين الأولين . والأجزاء بهذا المعنى الثالث هى المعتبرة بوجه خاص من الفلاسفة ، على حين يدخل المعنيان الأولان فى المنطق الرمزى والرياضيات . وهذا المعنى الثالث « للجزء » هو المعنى الذى يناظر correspond التحليل ، ويبدو أنه مما لا يقبل التعريف كالمعنى الأول ، أعنى أننى لا أعرف طريقة لتعريفه . وينبغى أن نأخذ فى بالنا أن المعانى الثلاثة لا بد أن تبقى متميزة ، أى إذا كان ا جزءاً من ب على أحد المعانى ، وكان ب جزءاً من حـ على معنى آخر ، فلا يجب أن نستنتج (على وجه العموم) أن ا جزءٌ من حـ على أىِ معنى من المعانى الثلاثة . ولكن قد يمكن أن نذهب إلى معنى

(١) انظر مثلا F. 1901, § 1, Prop. 4. 4, note (p. 12)

رابع عام يكون فيه أيِ شيء إذا كان جزءاً على أي معنى ، أو جزءاً على معنى بالجزء فى معنى آخر ، فإنه يسمى جزءاً . ومع ذلك فهذا المعنى قل أن يكون له أيِ نفع فى المناقشة الحاضرة .

١٣٦ — ولما كان الفرق بين أنواع الكلات مهماً ويوضح نقطة أساسية فى المنطق ، فإنى معاود بيانه فى عبارة أخرى . إن أى مجموعة مهما يكن أمرها إذا عرفت بدالة قضية غير تربيعية ، فهى ولو أنها من حيث هى مجموعة ، فهى كثيرة ، إلا أنها تكوّن كلاً أجزاؤه حدود المجموعة أو أى كل مركب من بعض حدود المجموعة . ومن المهم جداً ملاحظة الفرق بين الكل وجميع أجزائه حتى فى هذه الحالة التى يكون الفرق فيها ضئيلا . فلفظة « المجموعة » لأنها مفرد تكون أدق انطباقاً على الكل منها على جميع أجزائه ، ولكن مناسبة التعبير حماتنى على اطراح النحو والكلام عن جميع الحدود كأنها المجموعة . وسأسمى الكل المكوّن من حدود المجموعة « الجملة » . ويتخصص مثل هذا الكل تخصصاً تاماً حين تتخصص جميع مكوناته البسيطة ، وليس لأجزائه صلة مباشرة فيما بينها بل إنما توجد صلة غير مباشرة من حيث إنها أجزاء كل واحد لا غير . ولكن تحصل كلات أخرى تشتمل على علاقات أو ما يمكن أن تسمى محمولات ليس حصولها لمجرد أنها حدود فى مجموعة بل على أنها تُعلق أو تصف . ومثل هذه الكلات تكون دائماً قضايا لا تتعين تماماً حين تعرف جميع أجزائها . خذ مثلا بسيطاً هذه القضية : « ا يختلف عن ب » حيث ا و ب حدان بسيطان ، فالأجزاء البسيطة فى هذا الكل هى ا و ب والاختلاف ، ولكن سرد هذه الثلاثة لا يعين الكل ما دام ثمة كلان آخران مركبان من نفس الأجزاء وهما الجملة المؤلفة من ا و ب والاختلاف ، والقضية « ب يختلف عن ا » . فى الحالة الأولى مع أن الكل كان مختلفاً عن جميع أجزائه إلا أنه تعين تماماً بتعيين أجزائه . أما فى هذه الحالة فليس الكل مختلفاً فقط ولكنه لم يتعين حتى مع تعيين أجزائه . ولا يمكننا أن نشرح هذه الحقيقة بقولنا : إن الأجزاء تقوم على علاقات معينة تحذف عند التحليل ، إذ فى الحالة السابقة « ا يختلف عن ب » كانت العلاقة

مشمولة فى التحليل . الواقع يبدو أن العلاقة تكون شيئاً حين تعلق ، وتكون شيئاً آخر حين تسرد مجرد سرد على أنها حد فى مجموعة . وثمة صعوبات أساسية فى هذه الوجهة من النظر أطرحها جانباً على أنها غير داخلة فى الفرض من بحثنا الحاضر[1] .

وتنطبق ملاحظات من هذا القبيل على قولنا « ا موجود » « A is » وهذه جملة مركبة من « ا » ومن « الوجود Being »[2] ، ولكنها مختلفة عن الكل المركب من الجملة ا الوجود . وقولنا « ا هو واحد » A is one يثير نفس النقطة ، وكذلك قولنا « ا و ب هما اثنان » . حقاً جميع القضايا تثير هذه النقطة التى بها يمكن أن نميز بين القضايا وبين الحدود المركبة .

وهكذا نرى أن ثمة فصلين جد مختلفين من الكلات يسمى الأول منهما « الجملات » ، ويسمى الآخر « وحدات » . (الوحدة هنا لفظة لها تطبيق مختلف ، إذ كل ما هو فصل وليس صفراً ، وكان بحيث إذا كان س و ص حدين فيه وكانا متطابقين ، فهذا الفصل وحدة) . ويشتمل كل فصل من الكلات على حدود ليست مجرد مكافئة لجميع أجزائه . مثال ذلك أن الأجزاء ا ، أكبر من ، ب قد تؤلف ببساطة جملة ، أو قد تؤلف إحدى هاتين القضيتين : « ا أكبر من ب » أو « ب أكبر من ا » . وهكذا تثير الوحدات مشكلات تخلو منها الجملات . وحيث كانت الجملات أدخل بوجه خاص فى الرياضيات من الوحدات فسألتزم بوجه عام فى المستقبل استخدام الجملات .

١٣٧ — ومن المهم أن نتحقق أن الكل حد جديد مفرد متميز عن كل جزء من أجزائه ومن جميع هذه الأجزاء ؛ فهو واحد وليس كثيراً[3] ، وله علاقة بالأجزاء ولكن له وجود متميز عن وجودها . وقد يميل القارئ إلى الشك فيتساءل أثمة حاجة — خلاف الوحدات — إلى الكلات ، ولكن يبدو أن الأسباب

---

(١) انظر المجلد الأول ، الباب الرابع ، وبخاصة بند ٥٤ .

(٢) ليست التفرقة الاصطلاحية بين الكون والوجود واضحة فى اللغة العربية وضوحها فى الإنجليزية ، ولو أنه جرت العادة على ترجمة Being بالكون وترجمة Existence بالوجود (المترجم)

(٣) أى أنه من نفس الطراز المنطقى كأجزائه البسيطة .

الآتية تجعل الجملات أمراً لا غنى عنه من الناحية المنطقية . (١) إننا نتكلم عن مجموعة واحدة ، وتشكيلة واحدة ، إلخ ، وقد يبدو أنه فى كافة هذه الأحوال هناك حقاً شيء مَّا هو حدٌ مفرد . (٢) يظهر أن نظرية الكسور ، كما سنرى بعد قليل، تعتمد فى جزء منها ــ اعتماداً جزئياً ــ على المجموعات. (٣) سنرى أنه من الضرورى فى نظرية الكمية الممتدة افتراض أن المجموعات كى تكون غير متناهية لها ما قد يسمى بمقدار الانقسام وأن مجموعتين لامتناهيتين قد يكون لهما نفس عدد الحدود دون أن يكون لهما نفس مقدار الانقسام . وهذه النظرية كما سنرى لا غنى عنها فى الهندسة القياسية . يبدو إذن من هذه الأسباب أننا يجب أن نسلم بالمجموعة كشيء متميز عن جميع مكوناتها «أجزائها» ولها بكل منها علاقة معنية نهائية ولا تقبل التعريف .

١٣٨ ــ لقد عرضت فيما سبق لمذهب منطقى هام جداً يجعل من نظرية الكل والجزء الصدارة ــ أعنى المذهب القائل بأن التحليل تمويه أو «سفسطة». ذلك أن كل ما يمكن تحليله فهو كل ، وسبق أن رأينا أن تحليل الكلات هو من بعض الوجوه تمويه. ولكن من المهم التحقق من الحدود الضيقة جداً لهذا المذهب . فنحن لا نستطيع استنتاج :أن أجزاء الكل ليست حقاً أجزاءه ، ولا أن تلك الأجزاء غير مفروضة فى الكل بالمعنى الذى نقول عنه إن الكل غير مفروض فى الأجزاء ، ولا أيضاً أن المتقدم منطقياً ليس عادة أبسط من المتأخر منطقياً . صفوة القول إن التحليل ولو أنه يعطينا الحق ولا شيء غير الحق إلا أنه لا يمكن أبداً أن يعطينا كل الحق . وهذا المعنى فقط هو الذى يجب أن نقبله من هذا المذهب. وإذا اتخذنا للتحليل أى معنى أوسع من ذلك أصبح مجرد رداء للكسل يلتمس به العذر أولئك الذين يمقتون العمل .

١٣٩ ــ وعلينا ملاحظة أن ما سميناه بالفصول كواحد قد تؤول دائماً على أنها مجموعات ، إلا حيث تشتمل على حد واحد أو لا تشتمل على أى حد ، أو حيث كانت معرفة بدوال القضايا التربيعية . وحاصل الضرب المنطقى لفصلين كواحدين هو الجزء المشترك (على المعنى الثانى من المعانى الثلاثة المذكورة)

للمجموعتين ، ومجموعهما هو المجموعة المطابقة لأى مجموعة أو الجزء(أيضاً على المعنى الثانى) من أى مجموعة تكون المجموعتان المعطيتان جزأين منها ؛ ولا تكون مطابقة لأى مجموعة أخرى أو جزءاً منها[١] . وعلاقة الكل بالجزء على المعنى الثانى من معانينا الثلاثة علاقة متعدية وغير متماثلة ولكنها متميزة عن غيرها من العلاقات بأنها تسمح بالجمع والضرب المنطقيين ،وهذه الخاصية هى التى تكون أساس الحساب التحليلى المنطقى كما بحثه علماء سابقون على بيانو وفريج (ومنهم شريدر)[٢] .ولكن حيث كان الأمر متعلقاً بالكلات اللامتناهية ، فمن الضرورى ، وفى كثير من الحالات الأخرى لا مناص عملياً من البدء بفصل تصور أو محمول أو دالة قضية لنحصل منها على المجموعة . وبذلك تكون نظرية الكل والجزء أقل جوهرية من الناحية المنطقية من نظرية المحمولات أو فصول التصور أو دوال القضايا ، ولهذا السبب أرجأنا النظر فيها إلى هذه المرحلة المتأخرة .

---

(١) انظر Peano, F. 1901, § 2, 1.0 (p. 19)

(٢) انظر مثلا كتابه . Algebra der Logik, Vol. 1 (Leipzig 1890)

الباب السابع عشر

الكلات غير المتناهية

١٤٠ – لن ننظر فى الصعوبات الخاصة باللانهاية فى الباب الحاضر ، وسنرجئ الحديث عنها إلى الجزء الخامس . وغرضى الآن النظر فى مسألتين :

(١) هل توجد كلات لامتناهية ؟

(٢) وإن وجدت فهل يجب أن يكون الكل اللامتناهى ، الذى يشتمل على أجزاء ، على المعنى الثانى من معانينا الثلاثة ، جملةً مركبة من أجزاء على المعنى الأول ؟

ولكى نتجنب الإشارة إلى المعنى الأول والثانى والثالث فإنى أقترح من الآن فصاعداً استخدام هذه الاصطلاحات : الجزء بالمعنى الأولى يسمى « حد » الكل[1] . والجزء بالمعنى الثانى يسمى « جزءاً » فقط . والجزء بالمعنى الثالث يسمى « مكوناً » من مكونات الكل . وبذلك تنتمى الحدود والأجزاء إلى الجملات ، على حين تنتمى المكونات إلى الوحدات . وإذ كان لا بد من بحث الجملات والوحدات فيما يختص باللانهاية كل منها على حدة فسأبدأ بالنظر فى المجموعات .

الجملة اللامتناهية تناظر الفصل اللامتناهى ، أى الجملة التى لها عدد لامتناه من الحدود ، وتعرف مثل هذه الجملات بأنها تشتمل على أجزاء لها من الحدود مثل ما لها من أجزاء . وسؤالنا الأول هو : أتوجد مثل هذه الجملات ؟

غالباً ما ينكرون وجود الجملات اللامتناهية . وقد ذهب حتى ليبنتز الذى كان مناصراً لوجود اللامتناهى بالفعل ، إلى أنه حيث يتعلق الأمر بالفصول اللامتناهية ، فمن الممكن إصدار أحكام صحيحة عن « أى » حد من الفصل ولكن

---

(١) الجزء بهذا المعنى سيسمى كذلك جزءاً بسيطاً أو لا منقسما .

لا عن « جميع » الحدود ، ولا حتى عن الكل الذى (كما يقول) « لا » تؤلفه هذه الحدود[1] . وكذلك كانط ، فقد انتقد بسبب ذهابه إلى أن المكان كلٌّ لامتناه . ويذهب كثيرون إلى أن كل جملة يجب أن يكون لها عدد متناه من الحدود ، وحيث لا يتحقق هذا الشرط فليس ثمة كلٌّ حقيقى . ولكنى لا أعتقد أن مثل هذه الوجهة من النظر يمكن الدفاع عنها بنجاح . ويسلم عدد غير قليل من الذين ينكرون أن المكان كل معطى بأن ما يسمونه بالمكان المتناهى قد يكون كلا معطى ، مثال ذلك المكان فى غرفة أو صندوق أو حقيبة أو حافظة كتب . ولكن مثل هذا المكان إنما هو متناه بمعنى نفسانى ، أى بالمعنى الذى ندركه فى لمحة واحدة . وليس هو متناهياً على معنى أنه جملة من عدد متناه من الحدود ، ولا حتى على معنى أنه وحدة مركبة من عدد متناه من المكونات . فالتسليم بأن مثل هذا المكان يمكن أن يكون كلا تسليم بأن ثمة كلات ليست متناهية . (ويجب ملاحظة أن هذا ليس نتيجة التسليم بوجود أشياء مادية تشغل بوضوح أمكنة متناهية ، إذ من الممكن دائماً القول بأن مثل هذه الأشياء ولو أنه من الواضح أنها متصلة فإنها تتكون فى الحقيقة من عدد كبير ولكنه متناه من النقط المادية) . ويصبح هذا القول نفسه بالنسبة للزمان ، فأن تقول مثلا إن طولا معيناً من الزمان يقع بين شروق الشمس وغروبها فكأنك تسلم بوجود كل لامتناه ، أو على الأقل كل ليس متناهياً . وقد جرت عادة الفلاسفة أن ينكروا حقيقة المكان والزمان ، وأن ينكروا كذلك أنهما إذا كانا حقيقيين فإنهما جملتان . وسأحاول أن أبين فى الجزء السادس أن هذا الإنكار يعتمد على منطق خاطئ ، وعلى الصعوبات الخاصة بفكرة اللانهاية التى وجدت لها حلا اليوم . وما دام العلم والعقل السليم يتفقان فى جانب الوجهة المقابلة من النظر ، فسنقبل فكرة اللانهاية . وحيث لا يوجد أى دليل أولى يمكن أن يوجه ضد الجملات اللامتناهية ، فلنا أن نستمد من المكان والزمان دليلا فى صالحهما .

ثم إن الأعداد الطبيعية natural ، أو الكسور بين ٠ و ١ ، أو المجموع الكلى

---

(١) انظر Phil. Werke, ed. Gerhardt, II, 315; also I, p. 338, V, pp. 144-5.

لجميع الألوان، لامتناهية ويبدو أنها جملات حقيقية، وذلك من جهة أنه إذا كان ممكناً قول قضايا صادقة عن «أى» عدد فليس ذلك صحيحاً عن «جميع» الأعداد كما ذهب إلى ذلك السابقون ومنهم ليبنتز على أساس متناقضات اللانهاية، إلا أن ذلك أصبح غير لازم بتاتاً منذ أن حل كانتور هذه المتناقضات. أما حيث يمكن تعريف المجموعة بدالة قضية غير تربيعية فإنى أظن أن هذا يجب أن يدل على وجود جملة أصلية مركبة من حدود المجموعة. ويلاحظ كذلك أنه إذا لم تكن ثمة كلات لامتناهية فإن لفظة «الكون» Universe تكون خالية تماماً من المعنى.

١٤١ — لا بد لنا إذن من التسليم بوجود جملات لامتناهية. ويبقى علينا أن نسأل سؤالا أكثر صعوبة وهو: هل لنا أن نسلم بوجود وحدات لامتناهية؟ وهذا السؤال يمكن كذلك صياغته على النحو التالى: هل هناك أى قضايا مركبة لامتناهية؟ وهذا السؤال على جانب كبير جداً من الأهمية منطقياً، وسنحتاج إلى كثير من العناية فى تقريره ومناقشته.

وأول نقطة يجب أن تكون واضحة فيما يختص بمعنى الوحدة اللامتناهية. تكون الوحدة لامتناهية حين تكون جملة جميع مكوناتها لامتناهية، ولكن هذا البيان يصعب أن يقوّم معنى الوحدة اللامتناهية. فلا بد من إدخال فكرة المكوّن «البسيط» بغية الحصول على المعنى. ولنبدأ بأن نلاحظ أن مكوّن المكوّن مكون للوحدة، أى أن هذه الصورة من علاقة الجزء بالكل صورة متعدية، مثل الثانية، ولكنها مختلفة عن الصورة الأولى. ويمكن تعريف المكون البسيط بأنه ذلك الذى ليس له هو نفسه مكونات. وقد نفترض كى نستبعد السؤال الخاص بالجملات أنه لا مكوّن فى الوحدة التى نبحثها هو جملة، أو إذا كان ثمة مكون هو جملة فيجب أن يؤخذ هذا المكون على أنه بسيط. (هذه الوجهة من النظر عن الجملة تصبح مشروعة، لأن الجملة حد مفرد ولا يحتاج إلى ذلك النوع من التعقيد (التركيب) الخاص بالقضايا). وبهذا يكمل تعريف المكون البسيط.

ويمكن الآن أن نعرف الوحدة اللامتناهية بما يأتى: تكون الوحدة متناهية

عند ما ، وعند ما فقط ، تكون جملة مكوناتها البسيطة متناهية . ويقال عن الوحدة إنها لامتناهية فى جميع الأحوال الأخرى . وعلينا الآن أن نبحث أتوجد مثل هذه الوحدات[1] .

وإذا كانت الوحدة لامتناهية فمن الممكن أن نجد وحدة مكونة تشتمل بدورها على وحدة مكونة، وهكذا بغير نهاية . وإذا كانت هناك أى وحدات بهذه الطبيعة فهناك حالتان ممكنتان لأول وهلة وهما :

(١) قد تكون هناك مكونات بسيطة للوحدة المذكورة ، ولكن هذه المكونات لا بد أن تكون لامتناهية فى العدد .

(٢) قد لا تكون هناك أى مكونات بسيطة على الإطلاق ، ولكن جميع المكونات بغير استثناء قد تكون مركبة. أو خذ حالة معقدة شيئاً مّا ، فقد يحصل أنه ولو أن ثمة بعض المكونات البسيطة إلا أنها والوحدات المركبة منها لا تكوّن جميع مكونات الوحدة الأصلية . وتسمى الوحدة من أي نوع من هذين لامتناهية. وقد يمكن بحث النوعين معاً ولو أنهما متميزان .

الوحدة اللامتناهية ستكون قضية مركبة إلى ما لا نهاية له : أى لا تقبل التحليل بأى طريقة إلى عدد متناه من المكونات ، فتختلف بذلك اختلافاً أساسياً عن الأحكام الدائرة على جملات لامتناهية . مثال ذلك هذه القضية : « أى عدد له تال» فهى مركبة من عدد محدود من المكونات ،ويمكن إحصاء عدد التصورات الداخلة فيها ، وإلى جانب ذلك فهناك جملة لامتناهية من الحدود تدل عليها الطريقة المشار إليها بقولنا «أي» الذى نعده أحد المكونات . حقًّا قد يقال إن الغرض المنطقى الذي تخدمه نظرية الدلالة هو تمكين القضايا المركبة تركيباً نهائيًّا من الكلام على فصول لامتناهية من الحدود: ويحقق هذا الغرض باستخدام « جميع » و « أى » و « كل » ، وإذا لم يتحقق ذلك كانت كل قضية عامة عن فصل لامتناه مركبة تركيباً لامتناهياً . أما من جهتى فلست أرى طريقة ممكنة أجزم بها أتكون القضايا اللامتناهية التركيب ممكنة أو لا . ولكن الواضح لنا على الأقل هو أن جميع القضايا المعروفة لنا (وفيما يبدو جميع

(١) فى فلسفة ليبنتز جميع الأشياء الحادثة فهى وحدات لا متناهية .

القضايا التى يمكن لنا معرفتها) مركبة تركيباً متناهياً . وإنما نتمكن من بحث اللانهاية عند ما نحصل على مثل هذه القضايا عن الفصول اللامتناهية . ومن الحقائق الملحوظة والموفقة أن هذه الطريقة ناجحة . وبذلك لابد من ترك السؤال الخاص بوجود، أو عدم وجود، وحدات لامتناهية بغير حل . والشيء الوحيد الذى يمكننا قوله فى هذا الموضوع هو أنه لا شيء من مثل هذه الوحدات يقع فى أي باب من أبواب المعرفة الإنسانية ، وعلى ذلك فلا شيء منها يدخل فى أساس الرياضيات .

١٤٢ — وأنتقل الآن إلى السؤال الثانى : هل يجب أن يكون الكل اللامتناهى الذي يشتمل على أجزاء جملةً مركبة من حدود؟ لقد قيل غالباً مثلا إن للأمكنة أجزاء ، وأنه يمكن أن تنقسم إلى الحد المطلوب ، ولكن ليس لها أجزاء « بسيطة» ، أي أنها ليست جملات من النقط ، وتقال مثل هذه النظرية نفسها عن فترات الزمان . ومن الواضح الآن أنه إذا كان تعريفنا للجزء بواسطة الحدود (أى للمعنى الثانى للجزء بواسطة الأول) صحيحاً، فلا يمكن للمشكلة الحاضرة أن تقوم ما دامت الأجزاء إنما تنتمى للجملات . ولكن قد يقال إن معنى « الجزء» يجب أن يؤخذ على أنه لا يقبل التعريف ، فينطبق بذلك على الكلات لا على الجملات ، وهذا يتطلب منا أن نضيف إلى الجملات والوحدات نوعاً جديداً من الكل يناظر المعنى الثانى للجزء . وسيكون هذا الكل ذا أجزاء بالمعنى الثانى، ولكنه ليس جملة ولا وحدة . ويبدو أن مثل هذا الكل هو ما يقوم كثير من الفلاسفة بتسميته المتصل، ويقدم المكان والزمان غالباً أمثلة على مثل هذا الكل .

وقد يسلم أننا نجد بين الكلات اللامتناهية تمييزاً « يبدو » أنه صحيح ، ولكننى أعتقد أنه فى الواقع ليس إلا تمييزاً نفسانياً . فى بعض الأحوال لا نشعر بأى شك حول الحدود ، ولكننا نشعر بشك عظيم حول الكل ،وفى بعض الأحوال الأخرى يبدو الكل واضحاً ولكن الحدود يبدو من استنباطها أنها مزعزعة . مثال ذلك أن النسب بين ٠ و ١ هى بكل تأكيد غير منقسمة ، ولكن الجملة كلها

للنسب بين ٠ و ١، يبدو أنها من طبيعة التركيب أو الاستنباط. ومن جهة أخرى يبدو أن الأمكنة والأزمنة المحسوسة هى كلات واضحة ، ولكن استنباط النقط واللحظات اللامنقسمة هى من الغموض بحيث تعتبر غالباً غير مشروعة . ومع ذلك يبدو أن هذا التمييز ليس له أساس منطقى ولكنه يعتمد اعتماداً كلياً على حواسنا. وإن معرفة بسيطة بالهندسة الأحداثية تكفى أن تجعل الطول المتناهى يبدو مماثلا تمام التماثل لامتداد الكسور بين ٠ و ١ . وعلى الرغم من ذلك يجب أن نسلم أنه فى الأحوال التى تكون الأجزاء اللامنقسمة كالحال فى الكسور واضحة بالمعاينة فلا محل للمشكلة التى نحن بصددها . ولكن من المجازفة القول بأن جميع الكلات اللامتناهية لها أجزاء لامنقسمة لمجرد أننا نعرف ذلك من حالة بعضها . وبناء على ذلك لا تزال المشكلة قائمة وهى : إذا سلمنا بوجود كل لامتناه، فهل ثمة سبب عام يجعلنا نفترض أن يشتمل على أجزاء لامنقسمة ؟

١٤٣ — أول كل شىء لا يجب أن يؤخذ تعريف الكل غير المتناهى على أنه ينكر أن له عدداً معيناً من الأجزاء البسيطة لا تعيد تركيبه . مثال ذلك أن امتداد الكسور من ٠ إلى ١ له ثلاثة أجزاء بسيطة هى $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$. ولكنها لا تعيد تركيب الكل ، أى للكل أجزاء أخرى ليست أجزاء من الأجزاء المعينة ، أو مجموع الأجزاء المعينة . ثم إذا ركبنا كلا من العدد ١ ومن خط طوله بوصة ، فلهذا الكل دون ريب جزء واحد بسيط هو ١ . وقد يمكن استبعاد مثل هذه الحالة بالتساؤل: هل كل جزء من الكل هو جزء بسيط ، أو يشتمل على أجزاء بسيطة . وفى هذه الحالة إذا كان الكل مركباً من جمع ن من الحدود لكل لامتناه ، فيمكن حذف هذه الـ ن من الحدود البسيطة ، ويبقى السؤال عن الكل اللامتناهى الباقى . ومرة أخرى يبدو أن معنى سؤالنا هو ما يأتى : هل معنى الكل اللامتناهى عبارة عن جملة فعلية من أجزاء بسيطة لا تحصى ؟ لا ريب أن هذا السؤال هام ولكنه تابع لهذا السؤال : أهناك دائماً أجزاء بسيطة على الإطلاق ؟ قد نلاحظ أنه إذا وجد عدد بسيط متناه من الأجزاء ثم انتزعت من الكل ، فالباقى يكون دائماً لامتناهياً . وإذا لم يكن الأمر كذلك لكان عدده متناهياً ،

وما دام حد عددين متناهيين متناهياً ، فالكل الأصلى متناه تبعاً لذلك . فإذا استطعنا إثبات أن كل كل لامتناه يشتمل على جزء واحد بسيط ترتب على ذلك أنه يشتمل على عدد لامتناه من هذه الأجزاء . لأننا إذا حذفنا الجزء البسيط كان الباقى كلاً لامتناهياً وله تبعاً لذلك جزء بسيط جديد ، وهكذا . يترتب على ذلك أن كل جزء من الكل إمّا أن يكون بسيطاً ، وإما أنه يشتمل على أجزاء بسيطة ، بشرط أن يكون لكل كل لامتناه جزء بسيط واحد على الأقل . ولكن يبدو أن صعوبة إثبات ذلك كصعوبة إثبات أن كل كل لامتناه هو جملة .

وإذا انقسم الكل اللامتناهى إلى أجزاء متناهية فيجب أن يكون جزء على الأقل من هذه الأجزاء لامتناهياً ، وإذا انقسم هذا بدوره ، فيجب أن يكون جزء من أجزائه لامتناهيا ، وهكذا . وبذلك لا يُرَدُّ أىّ عدد متناه من القسمة جميع الأجزاء إلى التناهى . والقسمة المتتالية تعطى سلسلة لانهاية لها من الأجزاء ، وليس فى هذه السلسلة اللانهائية أى وجه للتناقض (كما سنرى فى الجزءين الرابع والخامس) . وبذلك لا توجد طريقة لإثبات بواسطة القسمة الفعلية أن كل كل لامتناه يجب أن يكون جملة . وبمقدار ما نستطيع أن نتبينه من هذه الطريقة فلا حاجة إلى مكونات بسيطة فى الكلات اللامتناهية كما لا حاجة إلى لحظة أولى فى الزمان أو عدد متناه أخير .

ولكن ربما يبرز تناقض فى الحالة التى نحن بصددها ينشأ عن الصلة بين الكل والجزء وبين التقدم المنطقى . ولا ريب أننا إذا ذهبنا إلى أن الكلات اللامتناهية ليس لها أجزاء منقسمة ، فقد يبدو التناقض أعظم مما إذا ذهبنا إلى أنه لا توجد لحظة أولى فى الزمان أو حد أبعد فى المكان . ولعل تفسير ذلك يرجع إلى أننا نعرف كثيراً من الحدود البسيطة ، وأن بعض الكلات اللامتناهية تتركب ولا ريب من حدود بسيطة ، على حين أننا لا نعرف شيئاً يوحى ببداية فى الزمان أو المكان . ولكن قد يكون لهذه المسألة أساس أكثر ثباتاً فى التقدم المنطقى ، لأن الأبسط داخل دائماً فى الأعقد بحيث لا يمكن قيام أى حقيقة عن الأعقد ، إلا إذا قامت الحقيقة عن الأبسط ، ولهذا السبب فنحن فى تحليل الكل اللامتناهى

نبحث دائما فى أشياء لولا وجود مكوناتها لم تكن لتوجد ألبتة . وبين هذا التقدم المنطقى وبين التسلسل الزمانى فرق حقيقى ، لأن اللحظة مثلا لا تفترض منطقياً وجود لحظة سابقة ، ولو افترضت ذلك لكان من التناقض إنكار وجود لحظة أولى ، كما ذهبوا (لنفس السبب) إلى أنه من التناقض إنكار وجود السبب الأول . ويبدو أنه يترتب على ذلك أن الكلات اللامتناهية ليس لها وجود ألبتة ، إلا إذا كان هناك عدد لا يحصى من الموجودات البسيطة وجودها مفروض فى تلك الكلات اللامتناهية . لأنه إذا كان الغرض باطلا ؛ فالنتيجة باطلة كذلك . وهكذا يبدو أن هناك سبباً خاصاً لإتمام التراجع اللانهائى فى حالة الكلات اللامتناهية مما لا يوجد إذا كانت هناك علاقات غير متماثلة موضع بحث . وهذا مثال آخر على خصوصية علاقة الكل بالجزء ، وهى علاقة تبلغ من الأساسية والأهمية ما يكاد يجعل جميع فلسفتنا تعتمد على النظرية التى نأخذ بها بالنسبة إليها .

ويمكن وضع نفس الحجة بشكل آخر بأن نسأل كيف نعرف الكلات اللامتناهية ، وهذا التعريف يجب ألا يكون لامتناهياً فى التركيب حتى لا يحتاج إلى وحدة لامتناهية . فإذا كان ثمة أى تعريف متناهى التركيب فلا يمكن الحصول عليه من الأجزاء التى إما أن يكون عددها لانهائياً (فى حالة الجملة) وإما أن تكون هى نفسها مركبة كالكل (فى حالة الكل الذى ليس بجملة) . ولكن أى تعريف متناهى التركيب سيكون بالضرورة بالمفهوم ، أى سيعطى بعض خصائص مجموعة من الحدود . ويبدو أن ليس ثمة طريقة أخرى معروفة لتعريف الكل اللامتناهى ، أو للحصول على مثل هذا الكل بطريقة لا تدخل فيها أى وحدة لامتناهية .

ويجب التسليم بأن الحجة المذكورة أقل جزماً مما كنا نود ، وذلك بالنظر إلى الأهمية العظمى للنقطة التى نبحثها . وقد يقال مع ذلك فى تأييدها إن جميع الحجج المقابلة تعتمد على الصعوبات المفروضة للانهاية ، فكلها من أجل ذلك باطلة . وأيضاً فإن طريقة الهندسة والديناميكا (كما سنبين فى الجزءين السادس والسابع) تتطلب بالضرورة النقط واللحظات .

صفوة القول فى جميع التطبيقات نجد أن نتائج المذهب الذى ندافع عنه أبسط بكثير ، وأقل تناقضاً ، وأعظم إرضاء من الناحية المنطقية من نتائج النظرية المقابلة . ولهذا السبب سأفترض خلال بقية هذا الكتاب أن جميع الكلات اللامتناهية التى نبحث فى أمرها هى جملات من الحدود .

الباب الثامن عشر

النسب والكسور

١٤٤ـ سيقتصر الباب الحاضر أساساً بمقدار ما يبحث فى علاقات الأعداد الصحيحة على الأعداد الصحيحة « المتناهية » ، أما تلك اللامتناهية فليس لها علاقات شبيهة بالضبط بما نسميه عادة النسب . غير أنى سأميز النسب كعلاقات بين الأعداد الصحيحة عن الكسور التى هى علاقات بين جملات ، أو قل بين مقادير انقسامها . وسنرى أن الكسور قد تعبر عن علاقات تقوم حيث تكون كلا الجملتين لامتناهيين . ومن الضرورى أن نبدأ بالتعريف الرياضى للنسبة قبل الشروع فى بحث اعتبارات أكثر عموماً .

ترتبط النسبة عادة بالضرب والقسمة ، فتصبح بذلك غير متميزة عن الكسور . ولكن الضرب والقسمة ينطبقان على السواء على الأعداد المتناهية واللامتناهية ، ولو أنه فى حالة الأعداد اللامتناهية ليس لهما الخصائص التى تربطهما فى حالة التناهى . ولذلك يصبح من الأوفق إقامة نظرية فى النسبة تكون مستقلة عن الضرب والقسمة .

يقال عن عددين متناهيين إنهما متعاقبان إذا كان ى فصلا يشتمل على أحد العددين ، ثم أضيف حد واحد إلى ى فكان الفصل الناتج عن ذلك مشتملا على العدد الآخر . فالتعاقب إذن هو علاقة واحد بواحد وغير متماثلة . فإذا كان للعدد ا مع العدد ب القوة النونية لهذه العلاقة من التعاقب(من حيث أن قوى العلاقات تعرف بالضرب النسبى) لكان ا + ن = ب . وتعبر هذه المعادلة بين ا و ب عن علاقة واحد بواحد تتحدد حين تعلم ن . فإذا كانت القوة الميمية لهذه العلاقة تقوم بين َا و َب ، فإننا نحصل على المعادلة الآتية : َا + م ن = َب . وأيضا يمكن تعريف م ن بأنها ٠ + م ن . فإذا كان عندنا ثلاثة أعداد

ا ، ب ، حـ بحيث يكون ا ب = حـ ، فإن هذه المعادلة تعبر عن علاقة واحد بواحد بين ا و حـ وتتحدد هذه العلاقة حين تعلم ب . ولنسم هذه العلاقة « B » . ولنفرض أيضاً أن اَ بَ = حـ ، فيترتب على ذلك أن بين ا و اَ علاقة هى حاصل الضرب النسبي بين B وعكس B َ حيث تشتق B َ من بَ ، كما اشتقت B من ب . ونعرِّف هذه العلاقة بأنها النسبة بين اَ و بين ا . ومزية هذه النظرية أنها لا تنطبق فقط على الأعداد الصحيحة المتناهية ، بل على جميع المتسلسلات من نفس الصنف ، أى جميع المتسلسلات من الصنف الذى اسميه متواليات .

١٤٥ — والنقطة الوحيدة التى تهمنا ملاحظتها بخصوص غرضنا من هذا البحث فيما يتعلق بالتعريف المذكور عن النسب ، هى أن هذه النسب عبارة عن علاقات واحد بواحد بين الأعداد الصحيحة المتناهية ، وهى جميعاً باستثناء حالة واحدة غير متماثلة ، ويقوم بين كل زوجين من عددين صحيحين متناهيين معينين علاقة واحدة لا غير ، ويمكن تعريفها بصيغة التعاقب ، وتكوّن بذاتها متسلسلة ليس لها حد أول أو أخير ، ولها حد بين أى حدين معينين ، فلها لذلك بينهما عدد لانهائى من الحدود . وما دامت النسب علاقات فينتج عن ذلك أن النسب لا يمكن أن تتطابق مع الأعداد الصحيحة ، مثال ذلك نسبة ٢ إلى ١ فإنها شىء يختلف بالكلية عن ٢ . ولذلك عندما نتكلم عن متسلسلات النسب باعتبار أنها تشتمل على أعداد صحيحة ، فليست الأعداد الصحيحة المشمولة أعداداً أصلية ، بل علاقات لها تناظُرُ واحد بواحد مع الأعداد الأصلية . وتنطبق نفس هذه الملاحظة على الأعداد الموجبة والسالبة . فالقوة النونية لعلاقة التعاقب ، هى العدد الموجب + ں ، الذى هو تصور مختلف تماماً عن العدد الأصلى ں . ثم إن اختلاط الأشياء بأشياء أخرى لها معها علاقة واحد بواحد هامة ، من الأخطاء التى كثيراً ما يتعرض الرياضيون للوقوع فيها ، وهو خطأ أحدث خلطاً شديداً فى فلسفة الرياضيات . وسنرى فيما بعد أمثلة لا حصر لها على هذا الخطأ نفسه ، ولذلك يحسن المبادرة بمعرفة أن أى فشل فى التمييز الدقيق على الأقل فى هذا الموضوع سيكون له أوخم العواقب .

ولا صعوبه فى ربط نظرية النسبة المذكورة سابقاً بالنظرية العادية المشتقة من الضرب والقسمة ، غير أن النظرية العادية لا تبين كما تفعل النظرية الحالية، لم لا يكون للأعدادالصحيحة اللامتناهية نسب تشبه بالضبط تلك التى للأعداد الصحيحة المتناهية . الواقع تعتمد النسبة على التعاقب ، والتعاقب كما عرفناه فيما سبق لا يوجد بين الأعداد الصحيحة اللامتناهية ما دامت لا تتغير بإضافة ١ إليها .

ومن الواجب ملاحظة أن ما يسمى جمع النسب يتطلب مجموعة جديدة من العلاقات بين النسب ، وهى علاقات يمكن أن تسمى نسباً موجبة وسالبة ، كما أن بعض العلاقات بين الأعداد الصحيحة هى أعداد صحيحة موجبة وسالبة . ومع ذلك فلا حاجة بنا إلى فضل من القول فى هذا الموضوع .

١٤٦ — يجب الاعتراف بأن نظرية النسبة المذكورة سابقاً لها مظهر صناعى جداً ، وهو مظهر يجعل من الغرابة أن تبدو النسب مما يحصل فى الحياة اليومية . الواقع أن ما يحصل فى الحياة اليومية هو الكسور لا النسب ، وليست الكسور شيئاً حسابياً خالصاً ، ولكنها تتصل فى الواقع بعلاقات الكل والجزء .

إن القضايا التى تثبت أحكاماً عن الكسور توضح فرقاً هاماً عن القضايا التى تثبت أحكاماً عن الأعداد الصحيحة . فقد يمكن أن نقول إن ا واحد ، ا و ب اثنان ، وهكذا ، ولا يمكننا أن نقول : ا ثلث ، أو ا و ب ثلثان . ذلك أننا نحتاج دائماً إلى شىء آخر له مع الشىء الأول علاقة الكسر المعينة فنقول ا ثلث ح ، و ا و ب معاً ثلثا ح ، وهكذا . قصارى القول : الكسور إما علاقة جزء بسيط بالكل ، أو علاقة كلين أحدهما بالآخر . ولكن ليس من الضرورى أن يكون الكل الواحد ، أو الجزء البسيط ، جزءاً من الكل الآخر . ويبدو أن الأمر بسيط فى حالة الكلات المتناهية ، فالكسر يعبر عن نسبة عدد الأجزاء فى الكل الأول وبين عددها فى الكل الآخر . ولكن النظر فى الكلات اللامتناهية سيبين لنا أن هذه النظرية البسيطة قاصرة عن الواقع .

١٤٧ — لا نزاع فى أن معنى قولنا نصف فرسخ ، ونصف يوم ، من المعانى المشروعة ، ولذلك لا بد من البحث عن معنى مَّا للكسور لا يعتمد أساساً على العدد. لأننا إذا قسمنا مدة معينة من أربع وعشرين ساعة إلى جزءين متصلين كل منهما هو نصف المدة كلها ، فليس ثمة إلا طريقة واحدة لعمل هذه القسمة ، ولكن « كانتور » قد بين أن أي طريقة ممكنة لقسمة المدة إلى قسمين متصلين فإنها تقسمها إلى جزءين لهما نفس « عدد » الحدود . لذلك لا بد من وجود وجه آخر تكون بحسبه المدتان المكونتين كل منهما من اثنتى عشرة ساعة متساويتان ، بينما تكون الساعة والثلاثة والعشرون غير متساويتين . وسأبحث هذا الموضوع بحثاً أوسع فى الجزء الثالث من هذا الكتاب ، أما الآن فسأشير إلى أن ما نحتاج إليه هو من طبيعة المقدار ، وأن ذلك لا بد أن يكون أساساً خاصية من خصائص الكلات المرتبة . وسأسمى هذه الخاصية « مقدار الانقسام » فأن نقول إن ا نصف ب ، يعنى أن ب كل ، فإذا قسم ب إلى جزءين متشابهين. لكل منهما نفس مقدار الانقسام كما للآخر ، فإن ا له نفس مقدار الانقسام. كالذي لكل من الجزءين . وقد يمكن تفسير الكسر $\frac{1}{2}$ على نحو أبسط شيئاً مَّا بأن ننظر إليه كعلاقة (شبيهة بالنسبة طالما كانت الكلات المتناهية هى موضع البحث) بين مقدارى أنقسام . وهكذا فإن الكسور المتناهية الصحيحة (مثل $\frac{ن}{1}$) تقيس علاقة الانقسام لجملة من ن من الحدود إلى الانقسام لحد مفرد . وتكون عكس العلاقة هى $\frac{1}{ن}$. وهنا نجد فصلا جديداً من الأشياء عرضة للاختلاط بالأعداد الصحيحة الأصلية ، مع أنه فى الواقع متميز تماماً . والكسور على النحو الذي فسرنا ها به الآن لها مزية (وعلى هذه الميزة تعتمد جميع الهندسة القياسية) إدخال التفرقة بين الأكبر والأصغر فى الجملات اللامتناهية التى لها نفس عدد الحدود ، وسيتبين لنا أكثر فأكثر كلما ألقينا الضوء على قصور المباحث العادية فى القياس إلى أى حد يبلغ معنى مقدار الانقسام من الجوهرية المطلقة فى الواقع . فالكسور إذن ، بالمعنى الذى قد تعبر فيه عن علاقات جملات لامتناهية — وهذا هو المعنى الذي يكون لها عادة فى الحياة اليومية —

هى فى الواقع من طبيعة العلاقات بين مقادير الانقسام ، ومقادير الانقسام إنما تقاس بعدد الأجزاء حيث تكون الجملات التى نبحث فيها متناهية . وقد يمكن أن نلاحظ كذلك (ولو أن هذه الملاحظة سابقة لأوانها) أنه حيث تكون النسب بالتعريف المذكور سابقاً مُنطقة أساسياً، فالكسور بالمعنى المذكور ها هنا تقبل كذلك قيماً غير مُنْطقة. وسنرجىء بحث هذا الموضوع إلى الجزء الخامس من هذا الكتاب .

١٤٨ — يمكن الآن أن نلخص النتائج التى حصلنا عليها فى هذا الجزء الثانى . فى الأبواب الأربعة الأولى بسطنا فى إيجاز النظرية الرياضية الحديثة عن الأعداد الصحيحة الأصلية كما نشأت من تعاون أعمال الرياضيين والمناطقة الرمزيين . وقد شرح الباب الحادى عشر معنى الفصول المتشابهة ، وتبين منه أن الخصائص الصورية العادية للأعداد الصحيحة ناتجة من تعريفها كفصول لفصول متشابهة . وبينا فى الباب الثانى عشر كيف أن الجمع والضرب فى الحساب كليهما يعتمدان على الجمع المنطقى ، وكيف يمكن تعريفهما بطريقة تنطبق على السواء على الأعداد المتناهية واللامتناهية ، وعلى حاصل الجمع والضرب المتناهى واللامتناهى ، وبحيث فضلا عن ذلك لا يدخل أى معنى للترتيب . وقدمنا فى الباب الثالث عشر تعريفاً دقيقاً للفصل اللامتناهى باعتبار أنه شبيه بفصل قد انتزع منه أحد حدوده ، وبينا على وجه الإجمال كيف نربط هذا التعريف بتعريف الأعداد المتناهية بالاستقراء الرياضى . وناقشنا فى الباب الرابع عشر النظرية الخاصة بالأعداد الصحيحة المتناهية ، وبينا كيف أن القضايا الأولية التى يثبت « بيانو » أنها كافية فى هذا الموضوع ، يمكن استنتاجها كلها من تعريفنا للأعداد الصحيحة الأصلية المتناهية . وهذا يؤيد رأينا من أن الحساب لا يشتمل على أى لامعرفات أو لامبرهنات خلاف الموجود فى أساس المنطق العام .

ثم تقدمنا فى الباب الخامس عشر نحو البحث فى مسائل فلسفية نبغى منها اختبار الاستقراءات الرياضية المذكورة اختباراً نقدياً . واستقر رأينا على اعتبار

« الحد » و « حد ما » لامعرفين ، وعلى تعريف العدد ١ وكذلك جميع الأعداد الأخرى بواسطة هذين اللامعرفين (مع بعض لا معرفات أخرى كذلك) وكذلك وجدنا أنه من الضرورى التمييز بين الفصل وبين فصل تصوره ما دام يمكن أن يوجد للفصل الواحد عدة فصول تصور مختلفة . وقررنا أن الفصل يشتمل على جميع الحدود التى يدل عليها فصل التصور ، وهى دلالة بطريقة مّا لا تقبل التعريف . غير أنه ظهر أن كلا من الاستعمال الجارى ومعظم الأغراض الرياضية يبيح لنا أن نطابق بين الفصل وبين الكل المكوّن من الحدود التى يدل عليها فصل التصور . ورأينا أن الأسباب الوحيدة التى تقال ضد هذه النظرية ، هى ضرورة التمييز بين الفصل الذى يشتمل على حد واحد فقط وبين ذلك الحد الواحد ، ثم هذه الحقيقة وهى أن بعض الفصول حدود لنفسها . ووضعنا كذلك تمييزاً بين الفصول المتناهية واللامتناهية يقوم على أن الأولى يمكن تعريفها بالماصدق ولا يمكن ذلك بالنسبة للأخرى ، ونعنى بتعريفها بالماصدق الإحصاء الفعلى لحدودها . وشرعنا بعد ذلك فى مناقشة ما يمكن أن يسمى بجمع الأفراد ، أى الفكرة الداخلة فى قولنا : « ا و ب » ، ووجدنا أن نظرية مستقلة شيئاً مّا عن الأعداد الصحيحة « المتناهية » يمكن أن تستند إلى هذه الفكرة . ولكن ظهر آخر الأمر ، نتيجة ما قمنا به من تحليل لمعنى « الفصل » ، أن هذه النظرية لا تتميز فى الواقع عن النظرية السابقة ، والفرق الوحيد بينهما أن هذه النظرية أخذت بتعريف الفصول بالماصدق .

وكان موضوع الباب السادس عشر بحث علاقة الكل بالجزء ، فوجدنا لهذه العلاقة معنيين لا يقبلان التعريف ، ومعنى يقبله ، ويناظرهما نوعين مختلفين من الكلات سميناهما على التوالى الوحدات والجملات . ورأينا أيضاً أنه إذا بسطنا فكرة الجملات لتشمل الحدود المفردة والفصل الصفرى فقد يمكننا اعتبار الكل المأخوذ به فى الحساب التحليلى التقليدى للمنطق الرمزى كجبر ينطبق بوجه خاص على علاقات الكلات بالأجزاء بالمعنى القابل للتعريف . ثم بحثنا فى الباب السابع عشر فكرة الكل اللامتناهى ، فاتضح أن الوحدات

اللامتناهية حتى إذا كانت ممكنة منطقياً فلا تظهر ألبتة بأى حال فى أى شىء يمكن أن تبلغه المعرفة الإنسانية . ولكننا وجدنا أن الجملات اللامتناهية يجب التسليم بها ، وبدا أن جميع الكلات اللامتناهية إذا لم تكن وحدات فلا بد أن تكون جملات من الحدود ، ولو أنه ليس من الضرورى بأى حال أن تكون الحدود بسيطة . (ومع ذلك فيجب نظراً لاستبعاد الوحدات اللامتناهية افتراض أنها ذات تركيب متناه) .

وأخيراً بحثنا فى الباب الثامن عشر النسب والكسور ، فرأينا أن النسب علاقات معقدة بعض الشىء للأعداد الصحيحة المتناهية ، أما الكسور فعلاقات بين انقسام الجملات ، وحيث كانت هذه الانقسامات مقادير ، فمناقشتها تدخل فى الجزء الثالث من هذا الكتاب الذى نبحث فيه الطبيعة العامة للكمية .

الجُزءُ الثَّالِثُ

الكميـــة

الباب التاسع عشر

معنى المقدار

١٤٩ – علاقة الكمية بالعدد لا يعدوها فى أهميتها إلا القليل من المشكلات التقليدية فى الفلسفة الرياضية. وقد مر الرأى الخاص بهذه العلاقة بكثير من التطورات . أما أوقليدس بحسب ما يتضح من تعاريفه للنسبة والتناسب، بل من طريقته بأسرها ، فلم يكن مقتنعاً بإمكان تطبيق الأعداد على المقادير المكانية . وحين جعل ديكارت وفيتا من هذا التطبيق مسلمةً أساسية فى مذهبهما بإدخال الهندسة الاحداثية ، ظهرت طريقة جديدة مع أنها وافرة بالنتائج إلا أنها أدت ككثير من أنواع التقدم الرياضى فى القرن السابع عشر إلى نقص فى الضبط المنطقى وفقدان فى دقة التمييز . فما المقصود بالقياس ، وهل جميع المقادير المكانية كانت خاضعة للقياس العددى ؟ كل ذلك من الأسئلة التى كانت تحتاج حتى وقت قريب جداً فى معرفتها إلى الأداة الرياضية الضرورية ، ولا نزال حتى الآن نحتاج إلى عمل الشىء الكثير قبل الوصول إلى إجابة كاملة . وكانت النظرة السائدة تذهب إلى أن العدد والكمية هما الموضوعان للبحث الرياضى ، وأن الاثنين يبلغان من التشابه مبلغاً لا يحتاجان معه إلى تفرقة دقيقة . ولذلك كان العدد يطبق على الكميات دون أى تردد ، وبالعكس حيث تكون الأعداد الموجودة قاصرة عن القياس ، فقد كانت تبتدع أعداد جديدة على أساس أن كل كمية لا بد أن يكون لها قياس عددى .

وقد تغير لحسن الحظ الآن كل ذلك ، وظهر طريقان مختلفان من الأدلة شقهما أصلا رجال مختلفون ، فوضعوا الأسس لتعميات واسعة مع دقة كاملة فى التفاصيل على حد سواء. فمن جهة نجد فايرشتراس ، وديدكند ، وكانتور ، وأتباعهم قد بينوا أنه إذا كان لا بد من استخدام الأعداد غير المنطقة استخداماً

معقولاً كمقاييس للكسور الكمية ، فيجب أن تعرف دون الإشارة إلى الكمية . وهؤلاء العلماء أنفسهم الذين بينوا ضرورة مثل هذا التعريف هم الذين حققوا الحاجة التى ابتدعوها .ومن هذا الطريق ابتُدِع خلال الثلاثين أو الأربعين السنة الأخيرة موضوع جديد أضاف إلى الصحة النظرية إضافة عظيمة ، وهو موضوع يمكن أن يسمى بحق علم الحساب ، لأنه إذ يبدأ بالأعداد الصحيحة ينجح فى تعريف أى شىء آخر يحتاج إليه — المنطقات ، والنهايات ، واللامنطقات ، والاتصال ، وما إلى ذلك . وينتج عن ذلك أنه ليس من الضرورى فى جميع الجبر والتحليل افتراض أي مادة أخرى خلاف الأعداد الصحيحة وهى نفسها يمكن كما رأينا أن تعرف فى صيغة منطقية . وهذا هو العلم ، أكثر بكثير من الهندسة غير الأقليدية ، الذى قضى حقاً على نظرية كانط الخاصة بالمعارف « الأولية » باعتبارها أساس الرياضيات . وقد كان الاتصال واللامنطقات فيما سبق القلاع الحصينة للمدرسة المسماة بالحدسيين ، غير أن هذه القلاع بعد الاستيلاء عليها لم تعد فى أيديهم ، فقد نما علم الحساب حتى أصبح يشمل كل ما يمكن أن يسمى فى الرياضة التقليدية بالرياضة البحتة .

١٥٠ — ولكن جنباً إلى جنب مع هذا الإصلاح البحت ، ظهر تقدم فى الاتجاه المضاد ، فقد اخترعت فروع جديدة للرياضة لا تبحث فى العدد — ولا فى الكمية ، مثل الحساب التحليلى المنطقى ، الهندسة الإسقاطية ، نظرية المجموعات (فى جوهرها) . وفضلا عن ذلك فقد ظهر أن القياس — إذا كان المقصود منه تبادل علاقة الأشياء التى ليست أعداداً أو جملات مع الأعداد — ليس امتيازاً خاصاً بالكميات ، فبعض الكميات لا يمكن قياسها ، وبعض الأشياء التى ليست كميات (مثل النسب غير التوافقية المعرفة إسقاطياً) يمكن قياسها . الواقع أن القياس كما سنرى يمكن أن ينطبق على جميع المتسلسلات من نوع معين — نوع يستبعد بعض الكميات ويشمل بعض الأشياء التى ليست كميات . وبذلك يصبح الانفصال بين العدد والكمية تاماً ، فكل منهما مستقل عن الآخر تماماً . وفضلا عن ذلك فقدت الكمية ما

كان لها عادة من أهمية رياضية نظراً إلى أن معظم النظريات الخاصة بها يمكن تعميمها بحيث تصبح نظريات تخص الترتيب، فلا غرابة أن يكون من الطبيعي مناقشة الترتيب قبل مناقشة الكمية . ومع ذلك فلما كانت جميع القضايا الخاصة بالترتيب يمكن إثباتها مستقلة عن الترتيب، وذلك فى بعض الأحوال الخاصة ؛ ولما كانت الكمية ستقدم توضيحاً — يحتاج إلى مجهود أقل من التجريد — للأصول التى يجب تطبيقها على المتسلسلات بوجه عام ؛ وعلاوة على ذلك لما كانت نظرية المسافة التى تكوّن جزءاً من نظرية الترتيب تفترض مقدماً بعض الآراء الخلافية فيما يختص بطبيعة الكمية ، فسوف أسلك الطريق الأكثر اتباعاً فأبحث الكمية أولا . وسأهدف فى هذا الباب إلى بسط نظرية فى الكمية لا تعتمد على العدد ، ثم أبين العلاقة الخاصة بالعدد الذى يكون لفصلين معينين من الكميات ، وعلى أساس هذه العلاقة يعتمد قياس الكميات حيثما كان هذا ممكناً . ومع ذلك فجميع هذا الجزء من الكتاب — ومن المهم أن تعرف ذلك — تسلم بالنظرة التقليدية . لأن الكمية كما سنرى لا تقبل التعريف فى صيغ من الثوابت المنطقية، وليست بالضبط معنى ينتمى للرياضة البحتة ألبتة . سأناقش الكمية لأننا ورثنا افتراض ورودها فى الرياضة ، ولأننا فى حاجة إلى مناقشة كاملة لإبطال هذا الافتراض . ولو أن هذا الافتراض لم يوجد لتجنبت أى ذكر لمثل هذا المعنى الذى يسمى الكمية .

١٥١ — عند تحديد معنى اصطلاح « كالكمية » أو « المقدار » ، نواجه هذه الصعوبة وهى : أننا حتى إذا استطعنا تعريف اللفظ فيجب أن نظهر بمظهر من يفترق عن الاستعمال الجارى . وتنشأ هذه الصعوبة حيثما توجد خاصيتان يفترض عادة أنهما غير منفصلتين، ولكننا نكتشف بعد الفحص الدقيق أنهما قابلان للوجود منفصلين . وفى حالة المقدار يبدو أن المعنى العادى ينطوى على :

١ — القدرة على قبول علاقتى « الأكبر » و « الأصغر » .

٢ — قبول الانقسام .

ومن المفروض أن الأولى من هاتين الخاصتين تستلزم الثانية . ولكن

لما كنت أقترح إنكار هذا اللزوم فلا بد إما أن أسلم بأن بعض الأشياء اللامنقسمة هي مقادير ، وإما أن بعض الأشياء التي تكون أكبر أو أصغر من بعضها ليست مقادير . ولما كان لا مناص من اختيار أحد هذين الافتراقين عن الاستعمال الجاري فسأختار الأولى الذي أعتقد أنه أقل خطراً . وبهذا يكون تعريف المقدار على هذا النحو : المقدار هو أي شيء أكبر أو أصغر من شيء آخر .

وقد يُظن أنه لا بد من ذكر « التساوي » ، مع فكرة الأكبر والأصغر في تعريف المقدار . ومع ذلك سنرى أن ثمة سبباً يجعلنا نظن — مهما يظهر أن هذه النظرة متناقضة — أن ما يمكن أن يكون أكبر أو أصغر من حد ما لا يمكن ألبتة أن يكون مساوياً لأي حد كان ، والعكس بالعكس . وسيحتاج هذا إلى تمييز ، تتضح ضرورته أكثر فأكثر كلما مضينا في البحث ، بين نوع الحدود التي يمكن أن تكون متساوية ، والنوع الذي يمكن أن يكون أكبر أو أصغر . وسأسمي النوع الأول « كميات » ، والنوع الثاني « مقادير » . فالمسطرة التي نستعملها كمية ، وطولها مقدار . والمقادير أكثر تجريداً من الكميات ، فحين تكون كميتان متساويتين يكون لهما « نفس » المقدار . وأول نقطة لا بد من تقريرها هي ضرورة هذا التجريد .

١٥٢ — ولنضع المقادير جانباً بعض الوقت ريثما نبحث في الكميات . الكمية هي أي شيء يقبل المساواة الكمية بشيء آخر . وينبغي التمييز بين المساواة الكمية وبين أنواع أخرى منه كالمساواة الحسابية ، أو المنطقية . وجميع أنواع المساواة تشترك في خصائص ثلاث هي : أن تكون منعكسة ومتماثلة ومتعدية ، بمعنى أن أي حد له هذه العلاقة على الإطلاق فله هذه العلاقة مع نفسه . فإذا كان ا له هذه العلاقة مع ب ، كان ب له هذه العلاقة مع ا ؛ وإذا كان ا له هذه العلاقة مع ب ، و ب مع حـ ، كان ا له هذه العلاقة مع حـ [١] .

(١) فيما يختص باستقلال هذه الخصائص الثلاث انظر Peano, *Revue de Mathématique*, VII, p. 22. وخاصية الانعكاس ليست ضرورية تماماً . أما الضروري حقاً والذي يصح فقط على التساوي الكمي (لأول وهلة على كل حال) فهو أن يوجد على الأقل زوج من الحدود له العلاقة المذكورة . فيترتب على الخاصيتين الأخريين أن كل حد من هذين الحدين له مع نفسه العلاقة المذكورة .

أمّا ما الذى يميز المساواة الكمية من الأنواع الأخرى، وهل هذا النوع من المساواة يقبل التحليل فمسألة أخرى أكثر صعوبة يجب أن نشرع الآن فى بحثها .

هناك بمقدار ما أعلم ثلاث نظريات أساسية عن المساواة الكمية :

١ — النظرية التقليدية التى تنكر المساواة كفكرة مستقلة وتقضى بالمساواة بين حدين عند ما ، وعند ما فقط ، يكون لهما نفس عدد الأجزاء .

٢ — وهناك ما يمكن أن يسمى بالنظرية النسبية للكمية . والتى بمقتضاها تكون المساواة والأكبر والأصغر هى كلها علاقات مباشرة بين الكميات . ولا حاجة لنا فى هذه النظرية إلى المقدار ، لأن انطباق المقدار يستبدل به التماثل والتعدى فى علاقة المساواة .

٣ — وهناك النظرية المطلقة عن الكمية والتى فيها لا تكون المساواة علاقة مباشرة بل تحلل إلى مقدار مشترك ، أى إلى انطباق العلاقة مع حد ثالث . وفى هذه الحالة سيكون ثمة نوع خاص من علاقة الحد بمقداره ؛ ويكون بين مقدارين من النوع نفسه علاقة الأكبر والأصغر ؛ على حين إنما تنطبق المساواة والأكبر والأصغر على الكميات بفضل علاقتها بالمقادير . والفرق بين النظريتين الثانية والثالثة هو نموذج للفرق الذى ينشأ فى حالة كثير من المتسلسلات الأخرى ، بخاصة بالنسبة للمكان والزمان . ومن ذلك يتضح أن الرأى الذى ننتهى إليه بالغ الأهمية .

١٥٣ — (ا) بحثنا فى الجزء الثانى من هذا الكتاب نوع المساواة القائمة على وجود نفس العدد من الأجزاء . فإذا كان هذا حقاً هو معنى المساواة الكمية فلن تأتى الكمية بأى فكرة جديدة . ولكن يمكن أن نبين فيما أظن أن الأكبر والأصغر لهما مجال أوسع من الكل والجزء ، ولهما معنى مستقل . وتساق فى ذلك الحجج الآتية (ا) يجب أن نسلم بالكميات اللامنقسمة . (ب) حيث يكون عدد الأجزاء البسيطة لامتناهياً فلا يوجد تعميم عن العدد يحقق النتائج المسلم بها فيما يختص باللامساواة . (ج) بعض العلاقات يجب أن نسلم أنها كمية ، ولا تتصور العلاقات أنها تقبل الانقسام . (د) وحتى إذا كان ثمة قبول للانقسام

فالبديهية القائلة بأن الكل أعظم من الجزء يجب أن نسلم بأهميتها لا على أنها ثمرة التعريف .

(ا) إن بعض الكميات لا تنقسم . إذ من المسلم به عموماً أن بعض الأمور النفسانية كاللذة والألم كمية . وفى هذه الحالة لو كانت المساواة تعنى نفس عدد الأجزاء اللامنقسمة ، فلا بد لنا من اعتبار لذة مّا أو ألم مّا مشتملا على مجموعة من الوحدات كلها كاملة البساطة وليست متساوية « فيما بينها » بأى معنى من معانى الدلالة ، لأن مساواة اللذات المركبة إنما تنشأ فقط على أساس هذا الفرض من عدد الوحدات البسيطة الداخلة فى تركيبه ، فتكون المساواة غير منطبقة صوريا على اللذات غير المنقسمة . ولو سلمنا من جهة أخرى بأن اللذات تنقسم إلى ما لا نهاية له بحيث لا تكون أى وحدة نأخذها غير منقسمة فيترتب على ذلك أن عدد الوحدات فى أى لذة معلومة أمر تعسفى بحت ، ولو فرضنا وجود أى مساواة بين اللذات فعلينا أن نسلم بأن أى وحدتين قد تسميان متساويتين أو لا متساويتين تسمية ذات دلالة [1] . ومن ثمّ سنحتاج فى المساواة إلى معنى مّا خلاف الانطباق فيما يختص بعدد الأجزاء . ويبدو مع ذلك أنه لا يمكن تجنب هذه النظرية الأخيرة ، إذ ليس ثمة أى سبب لاعتبار اللذات مشتملة على مجموع معين من الوحدات اللامنقسمة فقط ، بل أكثر من ذلك — لأنى أعتقد أن البحث الدقيق سيقنع أى شخص — أنه يمكن الحكم « دائماً » على لذتين حكماً له دلالته بأنهما متساويان أو لا متساويان . ومهما تكن اللذتان صغيرتين فقولنا إنهما متساويتان لا بد دائماً أن يكون له دلالته . ولكن طبقاً للنظرية التى أنازعها تبطل دلالة الحكم المذكور فى الحال حين تكون اللذتان وحدتين لا منقسمتين ومثل هذه النظرية من الواضح أنها لا سند لها ألبتة ، ولا أعتقد أن الذين [2]

---

(١) لن أستعمل أبداً لفظة : لا مساواة unequal لتعنى فقط : غير متساوى not equal ، بل لتعنى دائماً أكبر أو أصغر ، أى : غير متساوى ، ولو كان الأمر خاصاً بنفس النوع من الكيات.

(٢) انظر مثلا Bradley, "What do we mean by the Intensity of Psychical States ?

وانظر بوجه خاص ص ٥ ; Mind, N.S. Vol:IV

تمسكوا بها ودافعوا عن المقدمات التى ترتبت عليها ، قد فعلوا ذلك عن وعى .

(ب) بعض الكميات تنقسم إلى ما لا نهاية له . ومهما يكن التعريف الذى نأخذه عن العدد اللانهائى ، فليست المساواة متساوقة مع الانطباق فى عدد الأجزاء ، فأولا المساواة أو اللامساواة يجب دائماً أن تكون محدودة أى بالنسبة لكميتين من نفس النوع يجب أن يكون أحد الجوابين صحيحاً والآخر باطلا ، ولو أنه ليس فى مقدورنا غالباً أن نحكم بأيهما . ويترتب على ذلك أنه حيث تشتمل الكميات على عدد لانهائى من الأجزاء ، إذا كان لنا أن نرد المساواة أو اللامساواة إلى عدد من الأجزاء أصلا ، فينبغى أن ترد إلى عدد من الأجزاء « البسيطة » ، لأن عدد الأجزاء المركبة التى قد تؤخذ فى تركيب الكل أمرٌ تعسفى تماماً . ولكن المساواة كالحال فى الهندسة مثلا أضيق بكثير من الانطباق فى عدد الأجزاء . وكما نعرف من « كانتور » فإن العدد الأصلى للأجزاء فى أى جزءين متصلين من المكان هو نفس العدد ، بل إن العدد أو الصنف الترتيبى هو نفس العدد أو الصنف بالنسبة لأى طولين كيفما كانا . ولذلك فإذا كان ثمة أى لامساواة مكانية من النوع الذى تعودناه فى الهندسة والنظر العادى فينبغى أن نبحث عن معنى مَّا آخر عن المساواة يختلف عن ذلك الذى حصلنا عليه من عدد الأجزاء. قد يقال لى وقد بلغتُ هذه النقطة : إن المعنى فى غاية الوضوح فقد حصلنا عليه من التراكب . وبغير أن أفصل فصلا نهائياً فى مناقشة هذا الموضوع الذى سوف أبحثه فيما بعد ألاحظ ما يأتى (ا) أن التراكب ينطبق على المادة لا على المكان (ب) أنه كمعيار للمساواة فإنه يفترض أن المادة المتراكبة صلبة (حـ) أن الصلابة تعنى الثبات بالنسبة للخواص القياسية . وهذا يبين أننا لا نستطيع تعريف المساواة المكانية بالتراكب دون أن ندور فى حلقة مفرغة . الحق المقدار المكانى مما لا يقبل التعريف كأى نوع آخر من اللامعرفات ، وفى هذه الحالة ، كالحال فى جميع الحالات حيث يكون العدد لامتناهياً ، يكون عدد الأجزاء قاصراً تماماً حتى كمعيار .

(حـ) بعض العلاقات كميات . والذى أوحى بذلك المناقشة المذكورة

عن المقادير المكانية حيث يكون من الطبيعي أن تقام المساواة على المسافات. ومع أن هذه النظرية كما سنرى فيما بعد ليست مناسبة تماماً فإنها مع ذلك صحيحة في شطر منها. ويبدو أن هناك في بعض الأمكنة، وبكل تأكيد في بعض المتسلسلات (مثلا في متسلسلة الأعداد المنطقة) علاقات كمية للمسافة بين الحدود المتعددة. وكذلك يبدو أن التشابه والاختلاف كميات. خذ مثلا طيفين من اللون، فقد يبدو مما لا شك فيه أن طيفين من اللون الأحمر أكثر شبهاً أحدهما بالآخر من طيف من اللون الأزرق، ومع ذلك فلا توجد خاصة مشتركة في حالة لا توجد في الحالة الثانية أيضاً. و « الأحمر » إنما هو اسم جمع لسلسلة معينة من الأطياف، ويرجع السبب الوحيد لإطلاق اسم الجمع على هذه السلسلة إلى التشابه الوثيق بين حدودها، ولذلك لا يجب اعتبار « الأحمر » كخاصة مشتركة يرجع إليها تشابه طيفين من الأحمر. ولما كانت العلاقات لا يتصور حتى انقسامها، فالأكبر والأصغر من العلاقات لا يمكن أن يعتمدا على عدد الأجزاء.

(د) وأخيراً يحسن أن نبحث مباشرة معاني الأكبر والأصغر من جهة، والكل والجزء من جهة أخرى. ويبدو أن بديهية أقليدس وهي أن الكل أكبر من الجزء لها معنى غير منكور، ولكن طبقاً للنظرية التقليدية للكمية لا تكون هذه البديهية سوى مجرد تكرار. ومرة أخرى نجد أن هذه النقطة متصلة بمسألة التراكب أيؤخذ على معنى المساواة، أم على أنه مجرد معيار، وفي هذه الحالة الأخيرة يجب أن يكون للبديهية معنى، ولا يمكن أن نطابق بين المقدار وبين عدد الأجزاء [1].

١٥٤ — (٢) يوجد إذن في الكمية شيء ما بالإضافة إلى الأفكار التي ناقشناها حتى الآن، وبقي علينا أن نميز بين النظرية النسبية للمقدار والنظرية المطلقة.

---

(١) وازن بين المناقشة المذكورة وبين

Meinong, *Uber die Bedeutung des Weberschen Gesetzes*, Hanburgand Leipzig, 1896, especially Chap. 1, § 3.

النظرية النسبية تعتبر الكميات المتساوية لا على أنها حاصلة على أى خاصية مشتركة علاوة على الكميات غير المتساوية ، بل على أنها متميزة فقط بتبادل علاقة المساواة. فليس ثمة شيء، كهذا الذى يسمى المقدار، تشترك فيه الكميات المتساوية . ولا يجب أن نقول: هذا وذاك كلاهما طوله ياردة ، بل نقول : هذا وذاك كلاهما مساويان للياردة المعتمدة فى خزانة الدولة . واللامساواة أيضاً هى علاقة مباشرة بين الكميات لا بين المقادير . فلا يوجد شيء بمقتضاه تتميز مجموعة من الكميات المتساوية من مجموعة أخرى لا تساويها فيما عدا علاقة المساواة نفسها . وبناء على ذلك يجرى طريق التعريف كما يأتى : عندنا أولا كيفٌ أو علاقة كاللذة لها حالات متعددة تتخصص فى حالة الكيف بالوضع الزمانى أو الزمكانى ، وفى حالة العلاقة بالحدود التى تقوم بينها . فلنبحث كميات من اللذة ، لنركز حولها المعانى . تشتمل الكميات من اللذة على مجرد مركبات من « لذة فى وقت مَّا »، و« لذة فى وقت آخر » (وقد يمكن إضافة الموضع إذا ظن أن للذات وضعاً فى المكان) . وعند تحليل لذة خاصة لسنا نجد طبقاً للنظرية العلاقية أى عنصر آخر ، ولكن إذا وازنا بين هذه اللذات الخاصة وجدنا أن أى لذتين منها لهما علاقة واحدة لا غير من هذه العلاقات الثلاثة وهى المساواة والأكبر والأصغر . أمَّا لماذا تكون بعض اللذات لها هذه العلاقة ، وبعضها الآخر لها علاقة أخرى فمسألة من المستحيل نظرياً وبالدقة أن نعطى عنها جواباً ، إذ ليس هناك، إلا إذا افترضنا ذلك ، أى نقطة اختلاف سوى الوضع الزمانى أو الزمكانى. والكميات المتساوية من اللذة لا تتفق فى أى وجه تختلف فيه الكميات اللامتساوية ، كل ما فى الأمر أنه يحدث ، أن بعضها له هذه العلاقة وبعضها الآخر له علاقة أخرى .

ويجب التسليم بغرابة هذا الوضع للأمور ، ويزداد الأمر غرابة حين نفحص البديهيات اللامبرهنة التى تضطرنا النظرية العلاقية أن نفترضها . وهذه البديهيات هى ما يأتى (من حيث أن ا و ب و حـ كميات من نفس النوع) .

(١) ا = ب ، أو ا أكبر من ب ، أو ا أصغر من ب .

(ب) إذا علمت ا فهناك دائماً ب قد تكون متطابقة مع ا بحيث تكون ا = ب .

(حـ) إذا كانت ا = ب ، إذن ب = ا .

(د) إذا كانت ا = ب ، ب = حـ ، إذن ا = حـ .

(هـ) إذا كانت ا أكبر من ب ، إذن ب أصغر من ا .

(و) إذا كانت ا أكبر من ب ، ب أكبر من حـ ، إذن ا أكبر من حـ .

(ز) إذا كانت ا أكبر من ب ، ب = حـ إذن ا أكبر من حـ .

(ح) إذا كانت ا = ب ، ب أكبر من حـ ، إذن ا أكبر من حـ .

ويترتب على البديهيات (ب) ، (جـ) ، (د) أن ا = ا [١] . ومن (هـ) ، (و) ينشأ أنه إذا كانت ا أصغر من ب ، ب أصغر من حـ ، إذن ا أصغر من حـ . ومن (حـ) ، (هـ) ، (ح) أنه إذا كانت ا أصغر من ب ، ب = حـ ، إذن ا أصغر من حـ . ومن (حـ) ، (هـ) ، (ز) أنه إذا كانت ا = ب ، ب أصغر من حـ ، إذن ا أصغر من حـ .

(بدلا من بديهية (ب) يجب أن نضع هذه البديهية : إذا كانت ا كمية ، إذن ا = ا) . ويجب ملاحظة أن هذه البديهيات تؤدى إلى هذه النتيجة وهى أنه فى أى قضية يحكم فيها بالمساواة أو الزيادة أو النقصان ، فقد يمكن استبدال الكمية المتساوية فى أى مكان دون أن يتأثر صدق القضية أو كذبها . أضف إلى ذلك أن القضية ا = ا جزء أساسى فى النظرية . وتوحى أولى هاتين الحقيقتين إيحاء قوياً بأن ما يدخل فى القضايا الكمية ليس هو الكمية بالفعل بل خاصية معينة تشترك فيها مع كميات أخرى متساوية . وهذا الفرض يكاد أن يكون مبرهناً عليه من الحقيقة الثانية ا = ا . ذلك أنه قد يسلّم بأن العلاقة الوحيدة المماثلة والمتعدية مما لا يقبل التحليل ومما يمكن أن يكون للحد مع نفسه هى علاقة التطابق ، إن صح أن هذه حقاً علاقة . ومن ثمّ لا بد أن تكون علاقة المساواة

---

(١) وهذا لا ينتج من (حـ) ، (د) وحدهما لأنهما لا يحكمان بأن ا يساوى ب دائما . انظر بيانو المرجع السابق .

قابلة للتحليل . ولكن قولنا إن علاقةمّا تقبل التحليل هوأن نقول إما أنها تشتمل على علاقتين أو أكثر بين حدودها ، ومن الواضح أن هذا ليس الحال ها هنا ، وإما أنها إذا كانت تصل بين حدين فهناك حد ثالث يتعلق به الحدان بحيث حين ترتبط تعطى العلاقة الأصلية . وهكذا فالحكم بأن ا هو جد ب هو الحكم بوجود شخص ثالث هو ابن أو بنت ا وأب أو أم ب . ومن ثمّ إذا وجب أن تحلل المساواة فلا بد أن يتعلق الحدان المتساويان معاً بحد ثالث ما . ولما كان الحد قد يكون مساوياً لنفسه ، فأي حدين متساويين لابد أن يكون لهما « نفس » العلاقة بالحد الثالث المذكور . غير أن التسليم بذلك هو تسليم بالنظرية المطلقة للمقدار .

إن الفحص المباشر لما نعنيه بقولنا إن حدين متساويان أو لا متساويان سيعزز الاعتراضات الموجهة للنظرية العلاقية . وقد يبدو من المستحيل القول بأن الكميات المتساوية ليس لها على الإطلاق شيء مشترك فوق ما تشترك فيه مع الكميات اللامتساوية . وفضلا عن ذلك فإن الكميات اللامتساوية ليس اختلافها مجرد اختلاف ، فهي مختلفة بهذه الطريقة المعينة بقولنا إن شيئاً أكبر والآخر أصغر . ومثل هذا الاختلاف يبدو غير مفهوم ألبتة إلا إذا كان ثمة نقطة مّا من نقط الاختلاف تخص الكميات اللامتساوية ، وتكون غائبة حيث تكون الكميات متساوية. وهكذا فإن النظرية العلاقية ، ولو أنها فى الظاهر ليست متعارضة مع ذاتها على الإطلاق ، إلا أنها معقدة ومتناقضة . وسنجد أن كلا من التعقيد والتناقض بعيدان كلية عن النظرية المطلقة .

٥١٥ — (٣) وفى النظرية المطلقة هناك تصور واحد محدود فيما يتصل بمجموعة من الكميات المتساوية ، هذا التصور هو مقدار معين . وتتميز المقادير عن التصورات بأن لها علاقتى الأكبر والأصغر (أو على الأقل إحداهما) مع حدود أخرى هى من أجل ذلك مقادير أيضاً . ولا يمكن أن يكون مقداران متساويين لأن المساواة تتعلق بالكميات وتعرف بحصولها على « نفس » المقدار . وكل مقدار فهو تصور بسيط ولا معرّف . وليس أى مقدارين فإن أحدهما

أكبر والآخر أصغر ، على العكس إذا عُلم أي مقدار فالأكبر أو الأصغر منه من المقادير تكوّن فصلاً معيناً محدوداً يكون أى اثنين فيه فأحدهما أكبر والآخر أصغر . ومثل هذا الفصل يسمى « نوع kind » المقدار . ومع ذلك فإن نوع المقدار قد يعرف كذلك بطريقة أخرى لا بد من ربطها مع الطريقة المذكورة سابقاً ببديهية . وكل مقدار فهو مقدار « ا » شيء مَّا — لذة ، مسافة ، مساحة ، إلخ — وله بذلك علاقة معينة بالذات مع الشيء الذي هو مقدار له . وهذه العلاقة خاصة جداً ويظهر أنها لا تقبل التعريف أكثر من ذلك . وجميع المقادير التى لها هذه العلاقة لشيء واحد بالذات (كاللذة مثلا) فهى مقادير من نوع واحد ، وبهذا التعريف يصبح قولك إن مقدارين من نفس النوع فأحدهما أكبر والآخر أصغر بهديهية .

١٥٦ — وقد يُوَجه اعتراض إلى النظرية السابقة على أساس علاقة المقدار بالشيء الذي هو مقدار له . ولنحدد بحثنا ناظرين إلى اللذة . إن مقداراً من اللذة هو قدر من اللذة أو كيت وكيت شدة اللذة . ويبدو من الصعب اعتبار ذلك كفكرة بسيطة كما تتطلب النظرية المطلقة ، إذ يبدو أن ثمة عنصرين هما اللذة والشدة . وليس يشترط أن تكون الشدة هى شدة اللذة ، وشدة اللذة متميزة عن اللذة المجردة . ولكن ما نحتاج إليه فى تكوين مقدار معين من اللذة فليس الشدة بوجه عام بل شدة معينة خاصة ، وهذه الشدة النوعية لا يمكن أن تكون كذلك إلا بالإشارة إلى اللذة أو أي شيء ما آخر . فلا يمكن أن نقرر أولا كم يكون عندنا ، ثم نقرر أيكون ذلك عن لذة أم كتلة . فالشدة النوعية لا بد أن تكون من نوع خاص . وهكذا فليست الشدة واللذة عنصرين مستقلين ومتوافقين فى تعريف قدر معين من اللذة . وهناك أنواع مختلفة من الشدة ، ومقادير مختلفة فى كل نوع ، ولكن المقادير فى الأنواع المختلفة يجب أن تكون مختلفة . وبذلك يبدو أن العنصر المشترك المشار إليه بلفظة « الشدة » أو « المقدار » ليس شيئاً مَّا ذاتياً يمكن الكشف عنه بتحليل حد منفرد ، ولكنه مجرد حد على علاقة باللامساواة . وتعرف المقادير بأن لها هذه العلاقة ولا تتفق فى أى شيء آخر بمقتضى

ما يتضح من التعريف . والفصل الذى تنتمى إليه جميع المقادير يُعرف ، كالجزء المتروج من الجماعة ، بالعلاقات المتبادلة بين حدودها لا بعلاقة مشتركة مع حد خارجى — اللهم إلا إذا أخذت اللامساواة نفسها من حيث كذلك حدا مما يكون مجرد تعقيد لا لزوم له . ومن الضرورى أن نبحث ما يمكن أن يسمى بسعة أو مجال العلاقة كما نبحث فصل التصور ، فالمقدار هو الفصل الذى يكوّن سعة اللامساواة . وهكذا فإن مقدار اللذة شيء مركب ، لأنه يجمع بين المقدار واللذة ، ولكن مقداراً خاصاً من اللذة ليس مركباً ، لأن المقدار لا يدخل فى تصوره ألبتة . وإنما هو مقدار فقط لأنه أكبر أو أصغر من حد آخر معين ، وإنما كان مقداراً من « اللذة » بسبب علاقة معينة له مع اللذة . ومن الأسهل فهم هذا الأمر ، حيث يكون للمقدار الخاص اسم خاص ، فالياردة مثلا مقدار ، لأنها أكبر من القدم ، وهى مقدار للطول بسبب أنها تسمى طولاً « ما » . وهكذا فإن جميع المقادير تصورات بسيطة ، وتصنف إلى أنواع بسبب علاقتها مع كيف ما أو علاقة ما . أما الكميات التى هى حالات لمقدار فإنها تخصص بوضع زمكانى أو (فى حالة العلاقات التى هى كميات) بالحدود التى تصل العلاقة بينها . والكميات ليست بالضبط أكبر أو أصغر لأن علاقتى الأكبر والأصغر تقومان بين مقاديرها ، وهذه المقادير متميزة عن الكميات .

وإذا طبقنا هذه النظرية على إحصاء البديهيات الضرورية وجدنا تبسيطاً ملحوظاً ، فالبديهيات التى تظهر المساواة فيها أصبحت كلها مبرهنة ، وإنما نحتاج إلى ما يأتى (حيث أن ل ، م ، ن مقادير من نوع واحد) :

(ا) لا مقدار هو أكبر أو أصغر من نفسه .

(ب) ل أكبر من م أو ل أصغر من م .

(ح) إذا كانت ل أكبر من م ، إذن م أصغر من ل .

(د) إذا كانت ل أكبر من م ، م أكبر من ن ، إذن ل أكبر من ن .

وهنا نرى أن البديهية الصعبة التى سميناها فيما سبق (ب) قد استبعدت

وكذلك البديهيات الأخرى الخاصة بالمساواة ، وما بقى بعد ذلك فهو أبسط من المجموعة الأولى .

١٥٧ — الفصل بين النظرية المطلقة والنسبية يمكن أن يتم لأول وهلة بالرجوع إلى مبدأ عام معين واسع التطبيق أقترح أن أسميه مبدأ « التجريد » . ويقرر هذا المبدأ أنه حيث تكون للعلاقة — التى لها حالات — خاصيتا التماثل والتعدى ، فالعلاقة المذكورة ليست أولية بل تقبل التحليل إلى انطباق العلاقة مع حد آخر ، وأن هذه العلاقة المشتركة هى بحيث لا يكون ثمة إلا حد واحد لا غير على الأكثر يتعلق به حد معلوم مع هذه العلاقة ، ولو أن حدوداً كثيرة يمكن أن تتعلق بالحد المعلوم (أى أن العلاقة تشبه علاقة الابن بالأب ، فقد يكون للرجل عدة أبناء ولكن ليس له إلا أب واحد فقط) .

وهذا المبدأ الذى صادفناه من قبل عند الكلام عن الأعداد الأصلية قد يبدو معقداً بعض الشىء ، ومع ذلك فهو قابل للبرهان ، وعبارة عن مجرد تقرير دقيق لفرض شائع جداً . ومن المسلم به عموماً أن جميع العلاقات تحلل إلى تطابق أو تباين ما تحتويه . ومع أننى أرفض هذه النظرية بالكلية ، فإننى أحتفظ فيما يتصل بالعلاقات المتماثلة المتعدية بالنظرية التقليدية معدلة بعض الشىء . وإذا عبرنا عن المسألة بعبارة أكثر استعمالا قلنا إن مثل هذه العلاقات تقوم دائماً على حصولها على خاصية مشتركة ، ولكن الخاصية المشتركة ليست تصوراً بالغ الدقة ، ولن يحقق صوريا فى معظم دلالاته العادية وظيفة تحليل العلاقات المذكورة . فالكيف المشترك بين حدين يعتبر عادةً محمولاً لهذين الحدين . ولكن مذهب الموضوع والمحمول بأسره باعتبار أنه الصورة الوحيدة لما يمكن أن تكون عليه القضايا ، والإنكار التام للحقيقة القصوى للعلاقات ، قد استبعدهما المنطق الذى نذهب إليه فى هذا الكتاب . وإذا استبعدنا لفظة « المحمول » ، فيمكن القول بأن أعم معنى يمكن أن يطلق على الخاصية المشتركة هو ما يأتى : الخاصية المشتركة بين حدين هى أي حد ثالث لكليهما معه علاقة واحدة وبالذات ؛ وبهذا المعنى العام يكون حصول الخاصية المشتركة متماثلا ،

ولكن ليس من الضرورى أن يكون متعدياً، إذ لكى يمكن أن تكون متعدية يجب أن تكون العلاقة بالخاصية المشتركة بحيث يمكن أن يكون حد واحد فقط على الأكثر هو خاصية أى حد معلوم [١] . وهذا مثل علاقة كمية بمقدارها ، أو حادثة بالزمن الذى تحدث فيه : فإذا علم حد واحد من العلاقة هو المتعلق به علم الحد الآخر ، ولكن إذا علم المتعلق فلا يمكن بحال أن يعلم المتعلق به . من الممكن إذن إثبات أن حصول خاصية مشتركة من النوع المذكور يؤدى دائماً إلى علاقة متماثلة متعدية . أما ما يقرره مبدأ التجريد فهو العكس، أى أن مثل هذه العلاقات إنما تنشأ من الخصائص المشتركة من النوع السابق [٢] . ويجب ملاحظة أن علاقة الحدود بما سميته خاصيتها المشتركة لا يمكن أبداً أن تكون هى التى يدل عليها عادة بعلاقة الموضوع بالمحمول أو الفرد بفصله ، إذ لا يمكن أن يكون للموضوع (طبقاً للنظرية المذكورة) محمول واحد فقط ، ولا أن ينتمى الفرد لفصل واحد فقط . وعلاقة الحدود بخاصيتها المشتركة هى بوجه عام مختلفة فى الأحوال المختلفة . وفى الحالة التى نبحثها، الكمية شىء مركبٌ المقدار عنصر فيه ، وعلاقة الكمية بالمقدار تعرف علاوة على ذلك بأن المقدار لا بد أن ينتمى لفصل معين هو فصل المقادير . يجب إذن أن نعتبر ما يأتى كبديهية (كالحال فى الألوان) وهو أن مقدارين من نفس النوع لا يمكن أن يوجدا معاً فى موضع زمكانى واحد ، أو يقوما كعلاقتين بين نفس الزوج من الحدود . وهذا يحقق الانفراد المطلوب للمقدار . ومثل هذه الأحكام التركيبية غير المتوافقة، هى التى تؤدى إلى الأحكام السالبة، ولكن هذا الموضوع منطقى بحت، وليس من الضرورى أن نتوسع فيه فى هذا المجال.

---

(١) الدليل على هذه القضايا رياضى وهو يعتمد على منطق العلاقات . انظر للمؤلف مقالة "Sur la Logique des Relations" R. d. M. VII, No. 2, § 1, Props 6.1, and 6.2.

(٢) يبرهن على هذا المبدأ ببيان أنه إذا كانت ع علاقة متماثلة متعدية، وكان ا حداً فى مجال ع ، فإن ا له ، مع فصل الحدود التى له معها العلاقة ع معتبرة فى مجموعها ، علاقة كثير بواحد وتكون متساوية مع ع حين تضرب علاقيا بعكسها وبذلك يمكن أن يتطابق المقدار مع فصل من كيات متساوية إذا اقتصرنا على الحجج الصورية .

١٥٨ — نستطيع الآن تلخيص المناقشة السابقة فى بعض النتائج المختصرة : هناك أزواج معينة من العلاقات اللامعرفة تسمى « الأكبر » و « الأصغر » ، وهذه العلاقات لا متماثلة ومتعدية ، وهى غير متسقة بعضها مع بعضها الآخر . وكل منها عكس الآخر . بمعنى أنه حيث تقوم إحداهما بين ا ، ب ، تقوم الأخرى بين ب ، ا . والحدود القابلة لهذه العلاقات هى « المقادير » . وكل مقدار له علاقة خاصة معينة مع تصور ما نعبر عنه بقولنا : إنه مقدار « ا » ذلك التصور . ويقال عن مقدارين لهما هذه العلاقة لنفس التصور إنهما من نفس النوع ، وأن يكونا كذلك ، أى من نفس النوع ، هو الشرط الضرورى والكافى لعلاقتى الأكبر والأصغر . وعند ما يتخصص المقدار بوضع زمانى أو مكانى أو زمكانى ، أو عند ما ، فى حالة كونه علاقة ، يتخصص بأن يأخذ فى الاعتبار زوجاً من الحدود يقوم بينهما ، عندئذ يسمى المقدار المتخصص على هذا النحو « كمية » . ولا يمكن ألبتة أن يتخصص مقداران من نفس النوع بنفس التخصيص بالضبط . والكميتان الناتجتان من تخصص نفس المقدار يقال إنهما « متساويان » .

وبذلك تكون اللامعرفات عندنا هى : (١) الأكبر والأصغر ، (٢) كل مقدار خاص . أما القضايا التى لا تقبل البرهان عندنا فهى :

١ — كل مقدار له إلى حد معين العلاقة التى تجعله من نوع معين.

٢ — أى مقدارين من نفس النوع فأحدهما أكبر والآخر أصغر .

٣ — أى مقدارين من نفس النوع إذا قبلا أن يشغلا المكان أو الزمان فلا يمكن أن يكون لكليهما نفس الوضع الزمكانى . وإذا كان المقداران علاقتين فلا يمكن أن تقوم العلاقتان معاً بين نفس الزوج من الحدود .

٤ — لا مقدار أكبر من نفسه .

٥ — إذا كان ا أكبر من ب ، فإن ب أصغر من ا ، والعكس بالعكس .

٦ — إذا كان ا أكبر من ب ، و ب أكبر من حـ ، إذن ا أكبر من حـ [١] .

---

(١) ليس من الضرورى فى البديهيات (٥) ، (٦) أن نضيف قولنا : « ا ، ب ، حـ من حيث إنها مقادير » لأن علاقتى الأكبر والأصغر المذكورتين هما اللتان تعرف المقادير ، ولذلك تكون الإضافة مجرد تكرار .

وهناك بديهيات خلاف ذلك تميز أنواعاً متعددة من المقادير ، ولكن البديهيات المذكورة يبدو أنها وحدها الضرورية للمقادير بوجه عام . ولا شيء من هذه البديهيات يعتمد بأي حال على العدد أو القياس . ولذلك لا داعى أن نجزع من المقادير التى تستعصى على القسمة أو القياس والتى سنجد لها فى الباب القادم أمثلة عديدة .

ملاحظة على الباب التاسع عشر :

إن كتاب « مينونج» الذى يدور على قانون « فيبر » ، والذى أشرنا إليه من قبل ، من الكتب التى تعلمت منها الشيء الكثير ، والذى أتفق مع صاحبه إلى حد كبير ، ولهذا يبدو من المرغوب فيه أن أبرز موقفى من النقط التى أختلف فيها وإياه . ويبدأ ذلك الكتاب (بند١) بتمييز المقدار بأنه ذلك الذى يتحدد نحو الصفر . ومفهوم الصفر أنه نفى المقدار ، ثم يقرر بعد المناقشة هذه العبارة (ص ٨) : « المقدار ، أو ما له مقدار ، ما كان يسمح بتوليد الحدود بين نفسه وبين مقابله المناقض له » .

هل هذا القول يكوّن تعريفاً أو مجرد معيار فهو موضع شك ، ولكنه على أى الحالين يظهر لى مرفوضاً كميزة أساسية للمقدار . وتستمد هذه العبارة التأييد كما بيّن« مينونج » (ص٦ ﻫ) من التشابه مع « توقع الإدراك » [1] الذى قال به « كانط » ولكنها إذا لم أكن مخطئاً عرضة لاعتراضات خطيرة . فأولا جميع نظرية الصفر فى غاية الصعوبة ، ويبدو أنها تابعة لا سابقة لنظرية المقادير الأخرى . واعتبار الصفر كمقابل متناقض لمقادير أخرى أمر يبدو مضللاً . فلا بد أن تدل العبارة على الفصل الذى نحصل عليه من سلب فصل « المقادير من هذا النوع أو ذاك » ، ولكن من الواضح أن هذا لن ينتج الصفر من ذلك النوع من المقدار. وأى تفسير نعطيه لهذه العبارة فقد يبدو أنه يستلزم اعتبارنا الصفر لا على أنه

(١) Reine Vernunft, ed. Hartenstein (1867), p. 158.

مقدار من النوع الذى يكون الصفر منه . ولكن فى تلك الحالة ليس الصفر أصغر من المقادير من النوع المذكور ، ويبدو أنه لا يوجد معنى خاص فى قولنا إن مقداراً أصغر يكون « بين » الصفر ومقدار أكبر. على أي حال إن معنى « بين » كما سنرى فى الجزء الرابع يتطلب علاقات لا متماثلة بين الحدود التى هى موضع البحث . ويبدو أن هذه العلاقات فى حالة المقدار ليست شيئاً آخر سوى « الأكبر» و« الأصغر» ، وهما من أجل ذلك سابقان على « بَيْنِية » المقادير ، وأليق بالتعريف . وسأحاول فيما بعد أن أعطى ما أتصور أن يكون النظرية الصحيحة للصفر ، وعندئذ سيظهر مبلغ هذا الموضوع من الصعوبة . فليس من الحكمة إذن أن ندخل الصفر فى ابتداء بحث المقدار . وقد تثار اعتراضات أخرى : مثال ذلك أنه من المشكوك فيه هل جميع المقادير لها صفر ؛ وأنه فى الأنواع المتميزة من المقادير لا يكون للصفر أهمية ؛ وأنه بين المسافات حيث يكون الصفر مجرد تطابق لا تكاد توجد علاقة الصفر بالسلب أو اللاوجود كالحال فى الكيفيات مثل اللذة . ولكن السبب الرئيسى لا بد أن يكون التعاكس المنطقى الموجود فى إدخال « بين » قبل أن تتخصص أى علاقات لا متماثلة يمكن أن تنشأ منها . وسنلخص هذا الموضوع فى الباب الثانى والعشرين .

الباب العشرون

مدى الكمية

١٥٩ — هذه هي الأسئلة التي سنناقشها في هذا الباب: ما أنواع الحدود التي تكون فصلا من الكميات من نوع واحد، بحكم علاقتها المشتركة مع عدد من المقادير؟ أيوجد لجميع مثل هذه الحدود أي شيء آخر مشترك؟ أثمة أي علامة تؤكد أن الحد يتعلق على هذا النحو بمجموعة من المقادير؟ ما أنواع الحدود التي تقبل الدرجة، أو الشدة، أو الأكبر والأصغر؟

والنظرية التقليدية تعتبر قبول الانقسام علامة مشتركة لجميع الحدود التي لها مقدار. وقد رأينا فيما قبل أنه ليس ثمة أساس « أولى » لهذه النظرية. وعلينا الآن أن نفحص المسألة استقرائياً لنحصل على أكبر عدد ممكن من الأمثلة على الكميات التي لاشك فيها، وأن نبحث: ألها جميعاً قابلية الانقسام أو أي علامة أخرى مشتركة.

أي حد يقبل درجة الأكبر والأصغر فإنه يشتمل على مجموعة من المقادير من نوع واحد داخلة تحته. ومن ثمّ كانت صيغة التفاضل في النحو دليلا لأول وهلة على الكمية. فإذا كان هذا الدليل حاسماً فينبغي أن نسلم أن جميع الكيفيات، أو يكاد يكون جميعها، تقبل المقدار. وعبارات المدح والذم التي يوجهها الشعراء لمحبوباتهم تمدنا بصيغ التفضيل والأفضل من الصفات الشائعة. ولكننا نحتاج إلى شيء من الحذر حين نستعمل هذا الدليل القائم على طبيعة النحو فهناك دائماً فيما أظن « بعض » التفضيل الكمي حيث يكون هناك تفضيل وأفضل ولكنه في الغالب ليس تفضيلا يتعلق بالكيف المشار إليه في النحو.

خذ مثلا قول الشاعر :

« إيه أيتها الحورية
يا أحمر من السكرز
ويا أحلى من التوت
وأبهى من نور القمر »

فهذه أبيات تشتمل على ثلاثة تفاضلات ، أمَّا فيما يختص بالحلاوة والبهاء فإنى أعتقد أننا إزاء تفاضل كمى أصلى . أما فيما يختص بالاحمرار فقد يشك فى ذلك . فالتفاضل هنا – وعلى العموم حيث يتعلق الأمر بالألوان – لا يشير فيما أظن إلى لون معلوم بمقدار ما يشير إلى تشابه بمستوى من اللون . ومن المفروض أن ترتب الأطياف المختلفة من اللون فى متسلسلة بحيث يكون الاختلاف فى الكيف أكبر أو أصغر كما تكون المسافة فى المتسلسلة أكبر أو أصغر . وأحد هذه الأطياف هو « الأحمرار » المثالى ، وتسمى الأطياف الأخرى أكثر أو أقل احمراراً بحسب ما تكون أقرب أو أبعد من هذا الطيف shade فى المتسلسلة . وينطبق نفس هذا التفسير فيما أعتقد على مثل هذه الحدودمثل « أكثر بياضاً ، وأكثر سواداً ، وأكثر احمراراً » . فالكمية الصحيحة الداخلة ها هنا يبدو أنها فى جميع هذه الأحوال علاقة مَّا هى علاقة التشابه . ولا ريب أن الاختلاف بين طيفين من اللون هو اختلاف فى الكيف لا مجرد اختلاف فى المقدار . فعند ما نقول إن شيئاً أحمر من شىء آخر لا نستنتج أن الاثنين لهما نفس الطيف . ولو لم يكن هناك فرق فى الطيف فأكبر الظن أننا كنا نقول إن أحدهما ألمع من الآخر ، وهو نوع مختلف كل الاختلاف من التفاضل . ولكن على الرغم من أن الفرق بين طيفين هو فرق فى الكيف ، فإن هذا الفرق فى الكيف بمقدار ما يبينه الترتيب المتسلسل هو نفسه فرق يقبل التدرج . ويبدو أن كل طيف من اللون بسيطٌ ولا يقبل التحليل ، ولكن الألوان المتجاورة فى الطيف spectrum هى بلا نزاع أكثر تشابهاً من الألوان المتباعدة . وهذا هو الذى يعطى الاتصال للألوان . ونحن نقول إن هناك دائماً بين طيفين من اللون ا و ب لوناً ثالثاً هو حـ ، وهذا يعنى أن

حـ يشبه ا أو ب أكثر مما يمكن القول به عن ب أو ا . ولولا مثل هذه العلاقات من التشابه المباشر ما استطعنا أن نرتب الألوان فى متسلسلات . ويجب أن يكون التشابه مباشراً ما دامت جميع أطياف الألوان لا تقبل التحليل مما يظهر من أى محاولة للوصف أو التعريف [١] . وبذلك نحصل على حالة لا شك فيها من العلاقات التى لها مقدار . والتباين أو التشابه بين لونين هو علاقة ، وهو مقدار ، لأنه أكبر أو أصغر من تباين أو تشابه آخر .

١٦٠ — لقد أطلت بحث هذه الحالة من الألوان لأنها مثال واحد على فصل فى غاية الأهمية . وعند ما يمكن أن يرتب أى عدد من الحدود فى متسلسلة ، فكثيراً ما يحصل أن أى حدين من هذه الحدود لهما علاقة قد تسمى بوجه عام « مسافة distance » وهذه العلاقة تكفى فى توليد ترتيب متسلسل ، وتكون دائماً بالضرورة مقداراً . وفى مثل هذه الأحوال كلها إذا كانت حدود المتسلسلة أسماء وكان لهذه الأسماء تفاضل ، فالمتفاضلات تدل لا على أكثر من الحد المذكور بل على التشابه الأكثر بذلك الحد . فإذا فرضنا أن متسلسلة الزمن من المتسلسلات التى فيها مسافة ، فحين يقال عن حادثة إنها أحدث من أخرى ، فالمقصود أن مسافتها من الحاضر كانت أقل من الأخرى . وهكذا فإن الحداثة ليست بذاتها صفة للزمن أو الحادثة . فما يفاضل بينه كميا فى مثل هذه الأحوال هى علاقات لا كيفيات . وحالة الألوان مناسبة للتوضيح ، لأن للألوان أسماء والاختلاف بين لونين يسلم به عادة أنه كيفى . ولكن المبدأ واسع التطبيق جداً . أما أهمية هذا الفصل من المقادير ، والضرورة القصوى للوصول إلى أفكار واضحة عن طبيعتها ، فسيتضح ذلك أكثر فأكثر كلما مضينا فى البحث . وفلسفة الزمان والمكان بأسرها ، والمذهب المسمى بمذهب المقادير الممتدة ، يعتمدان على فهم واضح للمتسلسلات والمسافة .

---

(١) فيما يختص بموضوع تشابه الألوان انظر Meinong, "Abstrahiren und Verleichen," *Zeitschrift f. Psych. u. Phys. d. Sinnesorgane*, Vol. XXIV, p. 72 ff. ولست متأكداً أننى أتفق مع جميع حجة مينونج ، ولكن النتيجة العامة التى ينتهى إليها يظهر لى أنها صحيحة وأنها مبدأ منطقى هام .

يجب التمييز بين المسافة وبين مجرد الاختلاف أو اللاتشابه ، فالمسافة إنما تقوم بين حدود فى متسلسلة ، وهى على صلة وثيقة بالترتيب ، ويلزم عنها أن الحدود التى تقوم بينها لها اختلاف أقصى وبسيط وليس من جنس ما يقبل التحليل إلى مكونات . ويلزم عنها كذلك أن هناك انتقالا متصلا ، قليلا أو كثيراً ، خلال حدود أخرى تنتمى إلى نفس المجموعة ، وذلك من أحد الحدود البعيدة إلى الآخر . ومجرد الاختلاف « بذاته » يظهر أنه « القدر الأدنى » للعلاقة من حيث الشرط السابق لجميع العلاقات تقريباً . وهى دائماً مطلقة وغير قابلة للدرجات . وفضلا عن ذلك فإنها تصل بين أى حدين مهما يكونا ، ومن العسير تمييزهما من الحكم بأنهما اثنان . ولكن المسافة إنما تقوم بين أعضاء متسلسلة معينة ، ووجودها هو عندئذ أصل المتسلسلة . وهى علاقة نوعية ، ولها وجهة sense إذ يمكن أن نميز المسافة من ا إلى ب من المسافة من ب إلى ا . وهذه العلامة الأخيرة وحدها تكفى للتمييز بين المسافة وبين مجرد الاختلاف .

وقد يفترض أنه فى المتسلسلة التى يكون فيها مسافة فإنه على الرغم من أن المسافة ا ب يجب أن تكون أكبر أو أصغر من ا حـ فإن المسافة ب ء لا تحتاج أن تكون أكبر أو أصغر من ا حـ . مثال ذلك : من الواضح أن الفرق بين اللذة المستمدة من ٥ جنيهات و ١٠٠ جنيه أكبر من الفرق بين اللذة المستمدة من ٥ جنيهات و ٢٠ جنيهاً . ولكن أهناك حاجة إلى وجود مساواة أو لامساواة بين الفرق بين جنيه و ٢٠ جنيه ، والفرق بين ٥ جنيهات و ١٠٠ جنيه ؟ يجب أن يكون جواب هذا السؤال بالإثبات ، لأن ا حـ أكبر أو أصغر من ب حـ ، و ب حـ أكبر أو أصغر من ب ء ، إذن ا حـ ، ب حـ وكذلك ب حـ ، ب ء هى مقادير من نفس النوع . إذن ا جـ ، ب ء مقداران من نفس النوع ، وإذا لم يكونا متطابقين ، فأحدهما يجب أن يكون الأكبر والآخر الأصغر . إذن حين تكون هناك مسافة فى متسلسلة فأى مسافتين منهما متفاضلتان كميا .

ويجب ملاحظة أن جميع المقادير التى من نفس النوع تكون متسلسلة ،

وأن مسافاتها من أجل ذلك ، إذا كان لها مسافات ، فهى مرة أخرى مقادير . ولكن لا يجب افتراض أنها على العموم يمكن الحصول عليها بالطرح ، أو أنها من نفس النوع كالمقادير التى تعبر عن الفرق بينها . ويعتمد الطرح كقاعدة على قبول الانقسام ، ولذلك فهو على العموم لا ينطبق على الكميات اللامنقسمة . وهذه النقطة مهمة وسنناقشها تفصيلا فى الباب المقبل .

وهكذا فإن القرب والمسافة علاقتان لهما مقدار ، فهل توجد هناك علاقات أخرى لها مقدار ؟ هذا شىء فيما أعتقد موضع شك [1] . على الأقل لم يبلغ علمى مثل أى تلك العلاقة الأخرى ، ولو أنى لا أعرف أى طريقة لا تثبت وجودها .

١٦١ — وهناك فصل صعب من الحدود يعتبر عادة على أنه فصل مقادير ، ويستلزم فى الظاهر علاقات ولو أنها ليست بكل تأكيد دائماً علاقية . تلك هى المعاملات التفاضلية مثل السرعة والعجلة ، ويجب أن ننزلها فى اعتبارنا فى كل محاولة للتعميم فيما يختص بالمقدار ، غير أنه نظراً لتعقيدها فإنها تحتاج إلى مناقشة خاصة ، هى التى سنقدمها فى الجزء الخامس من هذا الكتاب ، وسنرى عندئذ أن المعاملات التفاضلية ليست أبداً مقادير ، بل هى أعداد حقيقية فقط أو قطاعات فى متسلسلات معينة .

١٦٢ — جميع المقادير التى بحثناها حتى الآن كانت إن شئت الدقة لامنقسمة ، وعندئذ يبرز هذا السؤال : أتوجد مقادير منقسمة ؟ وهنا أحسب أنه لا بد من هذا التمييز . فالمقدار فى أساسه واحد وليس كثيراً ، وبذلك لا مقدار يعبر عنه تعبيراً صحيحاً كعدد من الحدود . ولكن ألا يمكن أن تكون الكمية التى لها مقدار جملةً من الأجزاء ، وأن يكون المقدار مقدار قابلية للانقسام ؟ إذا كان الأمر كذلك ، فكل كل يشتمل على أجزاء فهو حد مفرد له خاصية

(١) انظر Meinong, *Uber aie Bedeutung des Weber'schen Gesetzes*, Hamburg and Leibzig, 1896, p. 23.

الانقسام . وكلما كانت الأجزاء التى يتكون منها أكثر كانت قابليته للانقسام أكبر . وطبقاً لهذا الفرض، الانقسام مقدار يمكن أن نحصل منه على درجة أكبر أو أصغر . ودرجة الانقسام تناظر بالضبط فى الكلات المتناهية عدد الأجزاء . ولكن ولو أن الكل القابل للانقسام فهو منقسم بالطبع ، إلا أن انقسامه ، الذى هو وحده مقدار على وجه الدقة ، ليس بالضبط منقسما . لأن قابلية الانقسام لا تشتمل بذاتها على أجزاء ، بل فقط خاصية أن يكون لها أجزاء . ومن الضرورى للحصول على الانقسام أن نلتزم حين نأخذ الكل أنه « واحد » ، وأن نعتبر الانقسام على أنه صفة له . وهكذا فمع أنه فى هذه الحالة يكون عندنا قياس عددى ، وجميع النتائج الرياضية للقسمة ، إلا أنه من الناحية الفلسفية لا يزال المقدار الذى نبحث فيه لا منقسما .

وهناك صعوبات مع ذلك فى الطريقة التى نسلم بها أن الانقسام هو كنوع من المقدار . إذ يبدو أن الانقسام ليس خاصية للكل بل مجرد علاقة للأجزاء . ومن الصعب أن نقرر شيئاً بخصوص هذه النقطة ، ولكنى أظن أننا يمكن أن نقول الشىء الكثير فى تأييد الانقسام كصفة بسيطة. فالكل له علاقة معينة يمكن أن نسميها تيسيراً علاقة التضمن لجميع أجزائه . وهذه العلاقة هى هى سواء أكانت الأجزاء كثيرة أم قليلة ، والذى يميز الكل من الأجزاء الكثيرة هو أن له مثل هذه العلاقات الكثيرة من التضمن . ولكن يبدو من الحكمة افتراض، أن الكل المشتمل على أجزاء كثيرة يختلف عن الكل ذى الأجزاء القليلة من بعض الوجوه الذاتية . الواقع يمكن أن ترتب الكلات فى متسلسلة تبعاً لحصولها على أجزاء أكثر أو أقل ، وهذا الترتيب المتسلسل يلزم عنه كما رأينا من قبل متسلسلات معينة من الخصائص تختلف قليلا أوكثيراً بعضها من بعضها الآخر ، وتتفق حين يكون لكلين نفس عدد الأجزاء المتناهية ولكنها متميزة عن عدد الأجزاء فى الكلات المتناهية . ولا يمكن أن تكون هذه الخصائص شيئاً آخر سوى درجة الأكبر والأصغر من الانقسام . وهكذا فإن مقدار الانقسام « يظهر » أنه خاصية بسيطة للكل المتميز عن عدد الأجزاء التى يشتمل الكل عليها ، ولكنه

يرتبط معها بشرط أن يكون هذا العدد متناهياً . فلو سلمنا بهذه النظرية فقد نسلم بأن يبقى الانقسام كفصل من المقادير التى تقبل القياس العددى ، ولكنه غير منقسم . وفى هذا الفصل يجب علينا أن نضع الأطوال والمساحات والأحجام ولكن لا المسافات . وسنرى مع ذلك فيما بعد أن انقسام الكلات اللانهائية ، بالمعنى الذى لا تقاس فيه هذه الكلات بالأعداد الأصلية ، يجب أن يشتق من علاقات بطريقة شبيهة بتلك التى تشتق بها المسافة ، ويجب أن يكون حقاً خاصية للعلاقات[(١)] .

وهكذا يظهر أن جميع المقادير على أى حال لامنقسمة . وهذه علامة واحدة مشتركة تملكها جميعاً ، وبمقدار علمى هى العلامة الوحيدة التى يجب إضافتها لتلك التى أحصيناها فى الباب التاسع عشر . وفيما يختص بمدى الكمية فقد يبدو أنه لا يوجد قضية عامة أكثر من ذلك . وهناك عدد كبير جداً من الحدود البسيطة غير العلاقية التى لها مقادير ، باستثناء الألوان والنقط واللحظات والأعداد.

١٦٣ — وأخيراً من المهم أن نتذكر أنه طبقاً للنظرية التى أخذنا بها فى الباب التاسع عشر ، فالمقدار المعلوم من نوع معلوم هو تصور بسيط له مع نوعه علاقة شبيهة بعلاقة الاستغراق فى الفصل . وعند ما يكون النوع نوعاً من الموجودات كاللذة ، فالذى يوجد بالفعل ليس أبداً هو النوع بل مقادير مختلفة خاصة من النوع . فاللذة إذا أخذت مجردة لا توجد ، ولكن يوجد منها مقادير متعددة . وهذه الدرجة من التجريد جوهرية فى نظرية الكمية ، فلا بد أن يكون هناك أشياء لا يفترق بعضها عن بعضها الآخر إلا فى المقدار . وقد تظهر الأسس التى تقوم عليها هذه النظرية بشكل أوضح عند فحص آخر لهذه الحالة فيما بعد .

ولنبدأ بقضية بنتام المشهورة : « إذا كانت كمية اللذة متساوية ، فإن المسمار الذى نعلق عليه الصورة فى الحائط يساوى قصيدة من الشعر » . هنا نجد أن الفرق الكيفى للذات هو جوهر الحكم بالذات ، ولكن كى نستطيع القول إن

---

(١) انظر الباب السابع والأربعين .

كميات اللذة متساوية يجب أن نتمكن من تجريد الفروق الكيفية بحيث نترك مقداراً معيناً من اللذة . فإن صح هذا التجريد فليس يجب أن يكون الفرق الكيفى فرقاً فى الكيف حقاً ، بل فقط فرق فى العلاقة بحدود أخرى كالفرق فى العلاقة السببية ، مثل هذه الحالة . ذلك أننا لا نوازن بين جميع حالات اللذة ، بل فقط كيفية لذتها — كما توضح بحق صورة الحكم . فإذا فرضنا أن مقدار اللذة ليس شيئاً منفصلا فستنشأ صعوبة ، هى أن مجرد عنصر اللذة يجب أن يكون متطابقاً فى الحالتين حيث نحتاج إلى فرق محتمل فى المقدار . ومن أجل ذلك لا يمكننا أن نذهب إلى أن الكل المحسوس وحده هو الذى يوجد ، وأن أى جزء منه عبارة عن تجريد ، ولا أن ما يوجد هو لذة مجردة وليست مقداراً من اللذة . ولا كذلك يمكن أن نقول : إننا نجرد من كل الحالات هذين العنصرين وهما المقدار واللذة إذ عندئذ لا نحصل على مفاضلة كمية بين اللذات . فقد تتفق الحالتان فى أنهما لذتان وفى أنهما مقداران ، ولكن هذا لا يعطينا مقداراً من اللذة ، وقد تعطى مقداراً للحالتين ككل وهو ما لا نسلم به . فلا يمكن إذن أن نجرد المقدار عموماً من الحالات لأنها ككلات ليس لها مقدار . وقد رأينا أننا لا يجب أن نجرد اللذة الخالصة إذا كان لنا أن نحصل على أى احتمال لمقادير مختلفة . وهكذا فما يجب أن نجرده هو مقدار من اللذة ككل ، وهذا لا يجب أن يحلل إلى مقدار وإلى لذة ، بل يجب أن يجرد ككل . ثم مقدار اللذة يجب أن يوجد كجزء من كل الحالات اللذيذة ، إذ إنما تتيسر المفاضلة الكمية حيث لا يوجد فرق إلا فرق المقدار على الأكثر . وبذلك تؤيد مناقشة هذه الحالة الخاصة النظرية القائلة بأن كل مقدار فهو غير قابل للتحليل وله فقط العلاقة ، الشبيهة بعلاقة الاستغراق فى الفصل ، بتلك الصفة المجردة أو العلاقة التى هى مقدار لها .

وإذ قد رأينا أن جميع المقادير فهى غير منقسمة فعلينا أن نبحث بعد ذلك إلى أى حد يمكن أن تستخدم الأعداد للتعبير عن المقادير ، وطبيعة القياس وحدوده .

الباب الحادى والعشرون

الأعداد كتعبير عن المقادير : القياس

١٦٤ – من الفروض التى يذهب إليها المثقفون من أصحاب الفطرة السليمة أن مقدارين من نفس النوع فيجب أن يقبلا المفاضلة العددية . فالناس يميلون إلى القول إنهم أصح أو أسعد ثلاثين فى المائة عما كانوا عليه دون أن يخطر ببالهم الشك فى أن مثل هذه العبارات تخلو من المعنى . وغرضنا فى هذا الباب أن نوضح المقصود من القياس ، وما فصول المقادير التى ينطبق عليها ، وكيف يطبق على تلك الفصول .

إن قياس المقادير فى أعم معنى له هو أى طريقة يقوم بها تناظر وحيد ومنعكس بين جميع أوبعض المقادير من نوع مَّا ، وبين جميع أو بعض الأعداد الصحيحة أو المنطقة أو الحقيقية بحسب الأحوال . (قد يظن أن الأعداد المركبة يجب أن تدخل فى هذا ، ولكن ما يمكن « فقط » أن يقاس بالأعداد المركبة هو فى الواقع دائماً جملة من المقادير من أنواع مختلفة لا مقدار منفرد .) وبهذا المعنى العام يتطلب القياس علاقة واحد بواحد بين الأعداد والمقادير المذكورة – علاقة قد تكون مباشرة أو غير مباشرة ، هامة أو تافهة تبعاً للظروف . والقياس بهذا المعنى يمكن أن ينطبق على عدد كثيراً جداً من فصول المقادير ؛ وينطبق القياس كما سنرى على فصلين كبيرين هما المسافات والانقسامات بمعنى أكثر أهمية وأوثق صلة .

وفيما يختص بالقياس على المعنى الأهم فليس ثمة إلا اليسير جداً من القول يمكن أن نقوله . ما دامت الأعداد تكوِّن متسلسلة ، وكان كل نوع من المقدار يكوّن كذلك متسلسلة فمن المستحسن أن يكون ترتيب المقادير المقيسة مناظراً

لترتيب الأعداد ، وبمعنى آخر تكون جميع علاقات « بين » هى نفسها للمقادير ومقاييسها . فحيثما يكون ثمة صفر ، فمن المستحسن أن يقاس بالعدد صفر . هذه الشروط وغيرها مما يحققها القياس إذا أمكن ، قد توضع ، ولكنها ذات أهمية عملية أكثر منها نظرية .

١٦٥ – هناك رأيان ميتافيزيقيان عامان ، ويبين أى رأى منهما إذا سلمنا به أن « جميع » المقادير تقبل نظرياً القياس بالمعنى المذكور . وأول الرأيين هو النظرية القائلة بأن جميع الحوادث إما أن تكون حوادث فى المتسلسلة السببية الديناميكية ، وإما أن يكون بينهما ترابط . وفيما يختص بما يسمى بالصفات الثانوية فإن هذه النظرية قد بحثتها العلوم الطبيعية بحثاً واسعاً حتى انتهت إلى معظم ما يسمى بالصفات الكمية المفرطة التى تظهر فى المكان مع القياس المكانى ، ومن ثمّ القياس العددى . أما فيما يختص بالكميات النفسية فالنظرية المذكورة هى التوازى النفسطبعى . وهنا نجد أن الحركة المرتبطة مع أى كمية نفسية تقدم دائماً من الناحية النظرية وسيلة لقياس تلك الكمية . أما الرأى الميتافيزيقى الآخر الذى يفضى إلى القابلية العامة للقياس فهو رأى أوحى به ما ذهب إليه كانط فى قوله « بتوقعات الإدراك » [١] ، أى أنه بين المقادير المفرطة هناك زيادة تصحب دائماً بزيادة فى الواقع . ويبدو أن الواقع فى هذا الصدد مرادف للوجود . ومن ثمّ يمكن أن نعبر عن المذهب كما يأتى : الوجود نوع من المقدار المفرط الذى حيث يوجد مقدار أكبر منه فهناك دائماً وجود أكثر مما إذا كان مقدار أصغر هو الموجود . (ليس من المحتمل أن هذا هو بالضبط مذهب كانط ولكنها على الأقل نظرية معقولة) . وفى هذه الحالة ما دامت حالتان من نفس المقدار (مثل كميتين متساويتين) يجب أن يكون لهما من الوجود أكثر مما لواحد فيترتب على ذلك أنه إذا كان مقدار واحد من نفس النوع يمكن أن نجد أن له نفس القدر من الوجود كالكميتين المتساويتين معاً ، إذن ذلك المقدار يمكن أن يسمى ضعف كل من

---

(١) Reine Vernunft, ed. Hart. (1867), p. 160 — وعبارة الطبعة الأولى توضح المذهب الذى أشير إليه أفضل من الطبعة الثانية ، انظر مثلا Erdmann's Edition, p. 161.

الكميتين المتساويتين . وبهذا السبيل تصبح جميع المقادير المفرطة من الناحية النظرية قابلة للقياس . ومن التناقض التسليم بأن لهذه الطريقة أى أهمية عملية ، ولكنها قد تعين فى ظهور معنى مثل هذه العبارة « سعيد مرتين » . إنها تخلع معنى مثلا حين نقول إن طفلا يحصل على لذة من قطعة شوكولاته تساوى نقطتين من حامض . وعلى أساس مثل هذه الأحكام يمكن بناء حساب اللذة من الناحية النظرية .

وثمة ملاحظة أخرى عامة على شىء من الأهمية . إذا سلمنا بأن جميع متسلسلات المقادير هى إما متصلة بحسب معنى كانتور ، وإما شبيهة بمتسلسلات يمكن انتخابها من متسلسلات متصلة ، فمن الممكن نظرياً إذن أن نربط أى نوع من المقادير بجميع أو بعض الأعداد الحقيقية بحيث يناظر الصفر والمقادير الأكبر الأعداد الأكبر . ولكن إذا اشتملت أى متسلسلة من المقادير — دون أن تكون متصلة — على متسلسلة متصلة ، فإن مثل هذه المتسلسلة من المقادير لن تقبل بالضبط نظرياً القياس بواسطة الأعداد الحقيقية (١) .

١٦٦ — ولنترك الآن هذه العموميات الغامضة بعض الشىء ، ولنشرع فى بحث معنى القياس الأشيع استعمالا والمحسوس . إن ما نحتاج إليه هو معنى ما نقول بمقتضاه إن مقداراً هو ضعف مقدار آخر . وفى الأمثلة المذكورة سابقاً استمد هذا المعنى من الترابط بالمقادير الزمكانية أو بالوجود . وهذا يفترض أن فى هذه الأحوال قد وجد معنى للعبارة . ومن ثم كان القياس يتطلب فى بعض الأحوال ضرورة وجود معنى ذاتى لهذه القضية : « هذا المقدار ضعف ذاك » . (سيظهر كلما مضينا فى البحث كيف يكون المعنى ذاتياً) وما دمنا نعتبر الكميات منقسمة بالطبع ، فهناك معنى كامل واضح لمثل هذه القضية : « المقدار ا ضعف ب حين يكون مقداراً للكميتين معاً ، لكل منهما المقدار ب » . (يجب ملاحظة أن قسمة « مقدار » إلى جزءين متساويين أمر

(١) انظر الجزء الخامس ، الباب الثالث والثلاثين .

مستحيل دائماً إذ لا يوجد ما نقول عنه مقادير متساوية) . ومثل هذا التأويل ينطبق على مقادير الانقسام . ولكن حيث قد سلمنا بمقادير أخرى ، فيجب أن نبحث لها عن تأويل مختلف (إن وجد) . ولنبدأ بفحص حالة قبول الانقسام ثم ننتقل بعد ذلك إلى الحالات الأخرى التى يكون القياس فيها ممكناً ذاتياً .

١٦٧ — انقسام الكل المتناهى مترابط مباشرة وبالطبع بعدد الأجزاء البسيطة فى الكل . وفى هذه الحالة مع أن المقادير قاصرة عن الجمع من النوع المطلوب ، فمن الممكن جمع الكميات بالطريقة التى شرحناها فى الجزء الثانى . وجمع مقدارى انقسام ينتج فقط مقدارين لا مقداراً جديداً . ولكن جمع كميتى انقسام ، مثل كليين ، ينتج كلا جديداً مفرداً ، بشرط أن يكون الجمع من النوع الذى ينتج عن الجمع المنطقى باعتبار الفصول هى الكلات المكونة من حدودها . وهكذا هناك معنى معقول فى قولنا إن مقدار انقسام هو ضعف مقدار آخر ، وذلك حين ينطبق على كل يشتمل من الأجزاء على الضعف . ولكن فى حالة الكلات اللامتناهية لا يكون الأمر بأى حال بهذه البساطة . فها هنا عدد الأجزاء البسيطة (بمعانى العدد اللامتناهى التى اكتشفناها حتى الآن) قد تكون متساوية بغير مساواة فى مقدار الانقسام. فنحن فى حاجة هنا إلى طريقة لا ترجع إلى الأجزاء البسيطة . وفى المكان الفعلى عندنا أحكام مساواة مباشرة بالنسبة لكليين لامتناهيين . وعند ما نحصل على مثل هذه الأحكام يمكننا أن نعتبر مجموع n من الكلات المتساوية كعدد n لكل منها ، لأن جمع الكلات لا يتطلب تناهيها . وبهذه الطريقة يصبح من الممكن المفاضلة العددية بين بعض الأزواج من الكلات . وبمقتضى الطرق الشائعة المعروفة جيداً ، بطريقة القسمة المستمرة وطريقة النهايات ، يمكن تطبيق ذلك على جميع أزواج الكلات التى هى بحيث يمكن المفاضلة المباشرة . وبدون هذه المفاضلات المباشرة ، وهى الضرورية منطقياً ونفسانياً على حد سواء [1] ، لا يمكن عمل أى

---

(١) انظر مينونج ، المرجع السابق ، ص ٦٣ — ٦٤ .

شيء . فنحن نرتد دائماً فى آخر الأمر إلى الحكم المباشر بأن مسطرتنا لم تغير حجمها كثيراً فى أثناء القياس ، وهذا الحكم سابق على نتائج العلم الطبيعى فيما يختص بالحد الذى تغير الأجسام بالفعل أحجامها . أما حيث تكون المفاضلة المباشرة مستحيلة نفسانيًّا ، فقد يمكن نظريًّا أن نضع بدل ذلك أوجهاً مختلفة منطقية من القياس لا تعطى خاصية عن الكل المنقسم بل عن علاقة مَّا أو فصل من العلاقات يشبه كثيراً أو قليلا تلك التى تقوم بين النقط فى المكان .
أما أن الانقسام بالمعنى المطلوب فى المساحات والأحجام ليس خاصية كل ، فينتج من أنه (وهو ما سنثبته فى الجزء السادس) بين النقط فى مكان هناك دائما علاقات تولد مكاناً مختلفاً . وهكذا فإن مجموعتين من النقط التى بالنسبة لمجموعة من العلاقات تكوِّن مساحات متساوية وتكوّن بالنسبة لمجموعة أخرى مساحات غير متساوية ، أو تكوّن بالنسبة لواحدة مساحة وللأخرى خطًّا أو حجماً ، فلو كان الانقسام بالمعنى المذكور خاصية ذاتية للكلات لكان ذلك مستحيلا . ولن نستطيع مناقشة هذا الموضوع مناقشة كاملة حتى نعرض للهندسة القياسية .

وحيث تكون المقادير انقسامات فإن الأعداد لا تقيسها فقط ، بل الفرق بين عددى القياس مع بعض القيود يقيس مقدار الفرق بين الانقسامات (والفرق هنا بمعنى اللاتشابه) : فإذا ثُبِّت أحد المقدارين فالفرق بينه وبين الآخر يزيد كلما زاد فرق عددى القياس ، لأن هذا الفرق يعتمد على الفرق بين عدد الأجزاء . ولكنى لا أعتقد أنه يمكن بوجه عام بيان أنه إذا كان ا ، ب ، حـ ، ء أعداداً تقيس أربعة مقادير ، وكان ا ــ ب ــ حـ = ء ، فإن فروق المقادير تكون متساوية . قد يبدو مثلا أن الفرق بين بوصة وبوصتين أكبر من الفرق بين ١٠٠١ بوصة و ١٠٠٢ بوصة . وليست لهذه الملاحظة أهمية فى الحالة المذكورة ، ما دمنا فى غير حاجة ألبتة إلى فروق الانقسام . ولكن فى حالة المسافات يكون لها صلة غريبة بالهندسة غير الأقليدية . ولكن من المهم نظرياً ملاحظة أنه إذا كان الانقسام مقداراً حقاً ــ مما يبدو أن

المساحات والأحجام تتطلبه — فليس إذن ثمة أساس لقولنا إن انقسام مجموع من وحدتين أكبر بما يساوى ضعف وحدة واحدة . حقاً لا يمكن التسليم تماماً بهذه القضية إذ لا مقدار « هو » مجموع أجزاء ، فلا مقدار هو ضعف مقدار آخر . والذى يمكن أن نعنيه فقط ، هو أن مجموع وحدتين يشتمل على ضعف عدد الأجزاء وهذا حكم حسابى لا كمى ، ولا يكون ملائماً إلا فى الحالة التى يكون فيها عدد الأجزاء متناهياً ، ما دام فى الأحوال الأخرى يكون ضعف العدد هو بوجه عام مساوياً له . وهكذا فإن قياس الانقسام بواسطة الأعداد يشتمل على عنصر اصطلاحى ، وهذا العنصر كما سنرى أكثر ظهوراً فى حالة المسافات .

١٦٨ — فى الحالة السابقة ما زال هناك جمع بأحد معنييه الأساسيين ، وهو التأليف بين الكلات لتكوين كل جديد . ولكن فى حالات أخرى من المقدار لا نحصل على مثل هذا الجمع . ذلك أن مجموع لذتين ليس لذةً جديدة بل هو مجرد لذتين . كذلك مجموع مسافتين ليس بالضبط مسافة واحدة ، غير أنه فى هذه الحالة نكون بإزاء امتداد لفكرة الجمع . ويجب أن يكون دائماً مثل هذا الامتداد ممكناً حيث نريد من القياس أن يقع بالمعنى الأقرب إلى الطبيعى والمحدود وهو الذى نناقشه الآن . وسأفسر أولا هذا الجمع العام فى صيغة مجردة ، ثم أوضح تطبيقه على المسافة .

يحدث فى بعض الأحيان أن يكون لكميتين قاصرتين عن الجمع الصحيح علاقةٌ لها نفسها علاقة واحد بواحد مع كمية من نفس النوع كالكميتين التى تقوم بينهما . ولنفرض أن ا ، ب ، حـ هى هذه الكميات ، فنحصل فى الحالة المفروضة على قضية مَّا هى ا ب حـ حيث ب علاقة تحدد وحدها وتتحدد فقط بواسطة كمية مَّا ب من نفس النوع الذى ينتمى إليه ا ، حـ . مثال ذلك إذا كان بين نسبتين علاقة يمكن أن نسميها فرقهما المحدد هو نفسه تماماً بواسطة نسبة أخرى ، وهى الفرق بين النسبتين المعلومتين فرقاً بالمعنى الحسابى . فلو كان ا ، ب ، حـ حدوداً فى متسلسلة فيها مسافة ، فالمسافتان ا ب ، ا حـ لهما علاقة تقاس بواسطة المسافة ب حـ (ولو أنها ليست متطابقة معها) . وفى جميع مثل

هذه الأحوال نستطيع بامتداد الجمع أن نضع ا + ب = حـ بدلا من ا ب حـ . وحيثما يكون لمجموعة من الكميات علاقات من هذا النوع ، وكان أيضاً ا ب حـ يلزم عنها ب ا حـ بحيث يكون ا = ب + ب + ا فى استطاعتنا أن نسير كما لو كان أمامنا جمع عادى فنتمكن تبعاً لذلك من إدخال القياس العدد .

وسنناقش فكرة المسافة مناقشة كاملة فى الجزء الرابع فى صلتها بالترتيب ، أما الذى يعنينى الآن فهو بيان كيف يمكن أن تقاس المسافات . وسأستخدم لفظ المسافة بحيث يشمل مفهوماً أعم بكثير من المسافة فى المكان . وسأعنى بنوع المسافة مجموعة من العلاقات الكمية اللاتماثلة تقوم إحداها ، وإحداها فقط ، بين أى زوج من الحدود فى فصل معلوم ، وتكون هذه العلاقات بحيث إذا وجدت علاقة من النوع الذى يقوم بين ا ، ب ، وكذلك بين ب ، حـ ، فهناك علاقة من ذلك النوع بين ا ، حـ ، وتكون العلاقة بين ا ، حـ هى حاصل ضرب العلاقتين القائمتين بين ا ، ب و ب ، حـ ، وهذا الحاصل تبديلى ، أى مستقل عن ترتيب عوامله . وأخيراً إذا كانت المسافة ا ب أكبر من المسافة ا حـ ، إذن ء ب أكبر من ء حـ ، حيث ء أى حد آخر فى الفصل . ومع أن المسافات هى هكذا علاقات وهى لذلك لا منقسمة وقاصرة عن الجمع الصحيح ، فهناك اصطلاح بسيط وطبيعى تصبح بواسطته مثل هذه المسافات قابلة للقياس العددى

والاصطلاح هو هذا : لتكن هذه المسافات ا. ا١ ، ا١ ا٢ . . . ا ن — ١ ا ن هى كلها متساوية وفى نفس الوجهة ، فإن ا . ا ن يقال إنه عبارة عن ن من المرات بالنسبة لكل من المسافات ا . ا١ ، ألخ ؛ أى يقاس بعدد يكبرها ن من المرات . وقد اعتبر هذا عموماً لا على أنه اصطلاح بل على أنه حقيقة واضحة. ومع ذلك فإنه نظراً إلى أن المسافات غير منقسمة، فلا مسافة هى فى الحقيقة مجموع مسافات أخرى ، ولا بد أن يكون القياس العددى فى شطر منه اصطلاحياً . وبهذا الاصطلاح تصبح الأعداد المناظرة للمسافات ، حيث يكون ثمة مثل هذه الأعداد ، متناهية إلا فيما يختص بعامل مشترك يعتمد على اختيار وحدة . والأعداد تفرض أيضاً بهذه الطريقة على حدود الفصل الذى تقوم

المسافات بينها . ولهذه الحدود علاوة على العامل الاختيارى ثابت جمع اختيارى يعتمد على اختيار الأصل . وهذه الطريقة التى تقبل تعمیما آخر ستشرح شرحاً كاملا فى الجزء الرابع . ولكى نبين أن « جميع » المسافات فى هذا النوع ، و « جميع » الحدود فى هذه المجموعة يمكن أن يكون لها أعداد تفرض عليها ، نحتاج إلى بديهتين أخريين ، هما بديهية أرشميدس ، والبديهية التى يمكن أن تسمى بديهية الخطية linearity[١] .

١٦٩ — وأهمية القياس العددى للمسافة على الأقل كما يطبق على المكان والزمان ، يعتمد فى شطر منه على حقيقة أخرى بها يرتبط بالقياس العددى للانقسام . فى جميع المتسلسلات توجد حدود متوسطة بين أى حدين ليست المسافة بينهما هى النهاية الصغرى . وتتعين هذه الحدود حين يتعين أقصى حدين . ويمكن أن تسمى الحدود المتوسطة بينهما « الامتداد stretch » من ا . إلى ا ن [٢] . والكل المركب من هذه الحدود كمية ، وله انقسام يقاس بعدد الحدود بشرط أن يكون عددها متناهياً . فإذا كانت المتسلسلة بحيث تكون مسافات الحدود المتعاقبة متساوية ، فإنه إذا كان هناك ن — ١ من الحدود بين ا . ، ا ن ، كان مقياس المسافة متناسباً مع ن . وهكذا فلو أنا أدخلنا فى الامتداد أحد الحدين الأخيرين دون الآخر ، كان مقياس الامتداد والمسافة متناسبين ، وناظرت الامتدادات المتساوية المسافات المتساوية . وبذلك فإن عدد الحدود فى الامتداد يقيس كلا من المسافة بين الحدين النهائيين ومقدار انقسام الامتداد كله . وحين يشتمل الامتداد على عدد لامتناه من الحدود ، نقدر لها امتدادات متساوية ، كما هو مبين فيما سبق . وحين تناظر الامتدادات المتساوية المسافات المتساوية ، عندئذ

---

(١) انظر الجزء الرابع الباب الحادى والثلاثين . وتقرر هذه البديهية أن المقدار يمكن أن ينقسم إلى ن من الأجزاء المتساوية ، ويكون جزءا من تعريف ديبوس ريموند للمقدار الطولى — انظر كتابه *Allgemeine Functionentheorie* (Tübingen, 1882), Chap. 1, † 16. وكذلك Bettazzi, *Teoria grandezze* (Pisa, 180), p. 44. وتقرر بديهية أرشميدس أنه إذا علم مقدار ن من نوع ما فإن المضاعف المتناهى للأصغر يفوق الأكبر.

(٢) يسميها مينونج Strecke — المرجع السابق ص ٢٢ .

تصبح هذه بديهية قد تصلح فى حالة معينة وقد لا تصلح . وفى هذه الحالة تقيس الإحداثيات مقدارين متميزين تماماً ، ونظراً إلى مقياسهما المشترك فإنهما يختلطان باستمرار .

١٧٠ — يفسر التحليل السابق مشكلة غريبة لا بد أنها ضايقت معظم الذين حاولوا فلسفة أمور الهندسة . فإذا بدأنا من المقادير ذات البعد الواحد المتصلة بالخط المستقيم أمكن أن نقسم معظم النظريات إلى قسمين ، البعض يناسب المساحات والأحجام ، والآخر يناسب الزوايا بين الخطوط أو السطوح . والمساحات والأحجام تختلف اختلافاً أساسيًّا عن الزوايا ، وتهملها عموماً الفلسفات التى تأخذ بنظريات علاقية فى المكان أو تبدأ من الهندسة الإسقاطية . وعلة ذلك فى غاية البساطة . فإذا كان على الخط المستقيم كما هو مفروض عادة مثل هذه العلاقة كالمسافة ، فعندنا مقداران متميزان فلسفيًّا ولكنهما ماتحمان عمليًّا ، وهما المسافة وانقسام الامتداد. والمسافة شبيهة بالزوايا ، وانقسام الامتداد شبيه بالمساحات والأحجام . ويمكن أن تعتبر كذلك الزوايا كمسافات بين الحدود فى متسلسلة أى بين خطوط من نقطة ، أوسطوح من خط . على العكس المساحات والأحجام هى حاصل جمع أو مقادير انقسام . ونظراً لاختلاط نوعى المقدار المرتبطين بالخط ، فإما ألا تتفق عادة الزوايا ، أو السطوح والأحجام ، مع الفلسفة المخترعة لتلائم الخط . ويفسر عدم التوافق هذا ويتبدد بالتحليل السابق الذكر[1] .

١٧١ — وهكذا نرى كيف أن فصلين كبيرين من المقادير — الانقسامات والمسافات — يصبحان قابلين للقياس . وهذان الفصلان يشملان عملياً ما نسميه عادة بالمقادير الممتدة extensive ، ومن الخير الاستمرار فى إطلاق هذا الاسم عليهما . وسأطلق هذا الاسم بحيث يشمل جميع المسافات والانقسامات سواء أكان لها أى علاقة بالمكان والزمان أم لا . غير أن لفظة « الممتدة » لا يجب أن

(١) سنرى فى الجزء السادس من الأسباب ما يجعلنا نرفض المسافة فى معظم الأمكنة . ولكن لا يزال ثمة تمييز بين الامتدادات المشتملة على حدود بعض المتسلسلات ، وبين مثل تلك الكميات كالمساحات والأحجام حيث لا تكون الحدود بأى معنى بسيط متسلسلة ذات بعد واحد .

نفترض أنها تدل كما تدل عادة، على أن المقادير الموصوفة بها منقسمة، فقد رأينا من قبل أنه لا مقدار منقسم . « الكميات » هى المنقسمة فقط إلى كميات أخرى فى الحالة الوحيدة التى تكون فيها الكلات كيات انقسام . أمَّا الكميات التى هى مسافات فليست منقسمة إلى مسافات أصغر ، ولو أنى سأسميها ممتدة . ولكنها تسمح بهذا النوع الهام من الجمع الذى شرحناه سابقاً ، والذى سأسميه فى المستقبل الجمع العلاقى[١] .

وجميع المقادير والكميات الأخرى يمكن أن تسمى بحق « مفرطة » ، وهى التى يستحيل قياسها العددى إلا بعلاقة سببية مَّا أو بواسطة علاقة تقريبية مما شرحناه فى ابتداء هذا الباب . وسيظن الرياضيون الذين ألفوا التأكيد المطلق للأعداد أننا لا نستطيع أن نقول الشىء الكثير بالتحديد فيما يختص بالمقادير القاصرة عن القياس . وليس الأمر كما يظنون بأى حال . فأحكام المساواة المباشرة التى يعتمد عليها كل قياس (كما رأينا) لا تزال ممكنة حيث يتعسر القياس ، كما يمكن استخدام كذلك الأحكام المباشرة للأكبر والأصغر . وإنما ينشأ الشك حيث يكون الفرق صغيراً ، وكل ما يفعله القياس فى هذا الصدد هو أن يجعل حافة الشك أصغر — وهو عمل نفسانى بحت وليس له أهمية فلسفية . فالكميات التى لا تقبل القياس العددى يمكن على هذا النحو أن ترتب فى سلم من المقادير الأكبر والأصغر ، وهذا هو الإجراء الكمى الوحيد الدقيق حتى للقياس العددى ، فيمكننا أن نعرف أن مقداراً أكبر من آخر ، وأن مقداراً ثالثاً متوسط بينهما . وأيضاً ما دامت فروق المقادير هى دائماً مقادير ، فهناك دائماً جواب (نظرياً على الأقل) لهذا السؤال : أيكون فرق زوج من المقادير أكبر أو أقل من فرق زوج آخر من نفس النوع ، أم هو نفس الفرق . ومثل هذه القضايا ولو أنها قد تبدو للرياضى تقريبية إلا أنها تبلغ من الدقة والتحديد مبلغ قضايا الحساب. بدون القياس العددى إذن، للعلاقات الكمية جميع التحديدات التى

---

(١) لا يجب أن يختلط هذا النوع من الجمع بالجمع النسبى relative الخاص بجبر العلاقات (النسب) ، فهذا متصل أكثر بالضرب النسبى .

تقدر عليها — ولا شيء يضاف من الوجهة النظرية بتعيين الأعداد المترابطة . الواقع أن موضوع قياس الكميات بأسره ذو أهمية عملية أكثر منها نظرية . والجزء المهم نظرياً فيه داخل فى مسألة أوسع ، هى ترابط المتسلسلة مما سنبحثه بحثاً أوفى فيما بعد . والسبب الرئيسى الذى جعلنى أعالج هذا الموضوع فى مثل هذا الإطناب يرجع إلى أهميته التقليدية ، ولولا ذلك لاقتصر بحثه على ملخص أكثر إيجازاً .

الباب الثانى والعشرون

الصفر

١٧٢ – لا يبحث هذا الباب فى أى صورة من صور الصفر العددى ولا فى اللامتناهى فى الصغر infinitesimal ، بل فى الصفر البحت للمقدار. وهذا هو الصفر الذى كان فى ذهن كانط حين نقض برهان مندلسون على خلود النفس (١). ويذهب كانط إلى أن المقدار المفرط قد يصبح صفراً مع بقائه من نفس النوع ؛ وأنه مع أن الصفر مقدار محدد ، إلا أنه لا كمية مقدارها صفر يمكن أن توجد. وهذا النوع من الصفر هو كما سنرى معنى كمى أساسى ، وهو من جملة النقط التى تتسم بها نظرية الكمية فتطبعها بطابع خاص بها. وللصفر الكمى صلة معينة بكل من العدد ، والفصل الصفرى فى المنطق ، ولكنه (فيما أعتقد) لا يقبل التعريف بدلالة أى منهما. أما استقلاله التام عن اللامتناهى فى الصغر فالاعتراف العام به أقل. ولن نناقش هذا إلا فى الباب المقبل.

إن معنى الصفر فى أى نوع من الكمية مسألة كثيرة الصعوبة وينبغى معالجتها بأعظم عناية ، إذا شئنا تجنب المتناقضات. ويبدو أن الصفر يمكن تعريفه بخاصية عامة معينة دون الإشارة إلى أى ميزة خاصة بنوع الكمية التى ينتمى إليها. ومع ذلك فالوصول إلى مثل هذا التعريف ليس بالأمر اليسير. والصفر « يبدو » أنه تصور متميز أساساً تبعاً للمقادير التى نبحثها ، أهى منفصلة أم متصلة. ولكى نثبت أن الأمر ليس على هذا النحو فلنبحث التعاريف المقترحة المختلفة.

١٧٣ – (١) يعتبر الأستاذ مينونج (المرجع السابق ص ٨) الصفر أنه المقابل المتناقض لكل مقدار من نوعه. وعبارة « المقابل المتناقض Contradictory

(١) Kritik der Reinen Vernunft, ed. Hartenstein, p. 281 ff.

opposite » لا تخلو من اللبس . فمقابل الفصل ، فى المنطق الرمزى ، هو الفصل المشتمل على جميع الأفراد التى لا تنتمى إلى الفصل الأول . وبناء على ذلك لا بد أن يكون مقابل الفرد جميع الأفراد الأخرى . ومن الواضح أن هذا المعنى غير ملائم : فالصفر ليس كل شىء ما عدا مقداراً واحداً من نوعه ، ولا كل شىء ماعدا فصل المقادير التى من نوعه. فمن العسير اعتبار قولنا : إن ألماً مّا هو صفر لذة ، صحيحاً . ومن جهة أخرى نقول : إن صفر لذة هو « لا لذة » ، ومن الواضح أن هذا هو ما يعنيه الأستاذ مينونج . ولكن على الرغم من أننا سنرى أن هذه النظرية صحيحة فإن معنى العبارة صعبٌ إدراكه جداً . فهى لا تعنى شيئاً آخر سوى اللذة ، وكذلك حين يؤكد لنا أصدقاؤنا أنه ليس من اللذة أن تكشف لنا أخطاؤنا . ويبدو أن هذا يعنى ما ليس بلذة ولا حتى بأى شىء آخر . ولكن ذلك ليس إلا طريقة معقدة لقولنا « لا شىء » ، ويمكن حذف الإشارة بالكلية إلى اللذة . وهذا يعطينا صفراً هو بعينه لجميع أنواع المقادير ، وإذا كان ذلك هو المعنى الصحيح للصفر ، فليس الصفر إذن أحد المقادير من نوع ما ، ولا حدا فى متسلسلة مكونة بواسطة مقادير من نوع مّا . لأنه ولو أنه من الصحيح فى الغالب أنه لا شىء أصغر من جميع المقادير من نوع مّا ، فمن الخطأ دائماً أن « لا شىء » ذاتها أصغر من جميعها . ليس لهذا الصفر إذن أى إشارة خاصة لأى نوع معين من المقدار ، وهو قاصر عن تحقيق الوظائف التى يتطلبها منه الأستاذ مينونج [1] . ومع ذلك فالعبارة تقبل كما سنرى تفسيراً يتجنب هذه الصعوبة . ولنبحث أولا بعض المعانى الأخرى المقترحة لهذا اللفظ .

١٧٤ — (٢) يمكن أن يعرف الصفر بأنه أقل مقدار من نوعه . وحيث يكون نوع من المقدار منفصلا ، وبوجه عام حين يكون له ما يسميه الأستاذ بتازى Bettazzi مقدار « نهائى limiting » للنوع [2] ، فإن مثل هذا التعريف يكون غير كاف . إذ فى تلك الحالة يبدو أن المقدار النهائى هو حقاً الأقل من

---

(١) انظر الملاحظة فى آخر الباب التاسع عشر .

(٢) Teoria della Grundezze, Pisa, 1890, p. 24.

نوعه . وعلى أى حال يعطى لنا التعريف خاصية أكثر مما يعطينا تعريفاً صحيحاً ، وهو الذى يجب أن نلتمسه فى معنى ماً منطقى بحت ، لأن الصفر لا يمكن أن يخلو من أن يكون على معنى ماً إنكاراً لجميع المقادير الأخرى من النوع . والعبارة التى تقول بأن الصفر أقل المقادير شبيهة بالعبارة التى يمتدحها ديمورجان De Morgan لما فيها من خطابة ، وهى : « كان أخيل أقوى جميع أعدائه » . وهكذا فمن الخطأ الواضح القول بأن ٠ أقل الأعداد الصحيحة الموجبة ، أو أن البعد بين ا و ا هو أقل بعد بين أى حرفين من الأبجدية . ومن جهة أخرى حيث يكون نوع من المقدار متصلا وليس له مقدار نهائى فمع أننا فيما يظهر نحصل على اقتراب تدريجى وغير محدود من الصفر . إلا أنه ينشأ الآن اعتراض ، هو أن المقادير من هذا النوع هى أساساً مما ليس لها نهاية صغرى ، ومن ثمّ لا يمكننا بغير تناقض مقصود ، أن نأخذ الصفر على أنه نهايتها الصغرى . ومع ذلك قد نتجنب هذا الاعتراض بقولنا : إن هناك دائماً مقداراً أقل من أى مقدار آخر ، ولكنه ليس الصفر ، إلا إذا كان ذلك المقدار الآخر هو الصفر . وهذا التعديل يتجنب أى تناقض صورى ، ولا يرجع قصوره إلا إلى أنه يعطى علامة للصفر أكثر مما يعطى معناه الصحيح . وكل شىء آخر هو مقدار من النوع المذكور فقد يمكن أن يتناقص . ونريد أن نعرف ، ما الذى يجعل الصفر قاصراً كما هو الواضح من أى تناقص آخر . ولما كان التعريف المقترح لا يدلنا عليه ، فإنه على الرغم من أنه يعطى خاصية لا تنتمى فى الغالب لأى مقدار آخر من هذا النوع ، فلا يمكن اعتباره من الناحية الفلسفية كافياً . وفضلا عن ذلك فحيثما تكون هناك مقادير سالبة ، فإن هذا الترتيب يمنعنا من اعتبار هذه المقادير أقل من الصفر .

١٧٥ — (٣) حيث تكون المقادير فروقاً أو مسافات ، فللصفر من أول وهلة معنى واضح هو التطابق . وهنا نجد أن الصفر بحسب التعريف المذكور يبدو أنه من الأولى ألا علاقة له بنوع ماً من المسافات دون نوع آخر : فقد يبدو ، أن صفر المسافة فى الزمان هو نفسه كصفر المسافة فى المكان . ومع ذلك فيمكن

تجنب هذا الاعتراض بأن نضع بدل التطابق البحت ، التطابق المصحوب بعضو مَّا فى فصل الحدود التى تقوم المسافات المذكورة بينها . وبهذه الحيلة نجعل الصفر فى أى فصل من العلاقات التى هى مقادير ، محدداً تماماً وخالياً من التناقض . وعلاوة على ذلك عندنا كل من صفر الكميات وصفر المقادير ، لأنه إذا كان ا و ب حدين من الفصل الذى له المسافات ، فالتطابق مع ا . والتطابق مع ب هما صفران متميزان من الكمية [١] . وبذلك تتضح هذه الحالة وضوحاً تاماً . ومع ذلك فالتعريف لا بد أن يُستبعد ، إذ من الواضح أن للصفر معنى مَّا عاماً ، بشرط أن نضع ذلك فى صيغة واضحة ، وهو ما ينطبق على جميع فصول الكميات . وليس صفر المسافة هو بالفعل نفس التصور كالتطابق

١٧٦ — (٤) فى أى فصل من المقادير التى تكون متصلة بمعنى أن لها حداً بين أى اثنين ، والتى أيضاً ليس لها مقدار نهائى ، فيمكن أن ندخل الصفر فى الطريقة التى نحصل بها على الأعداد الحقيقية من المُنْطقات . فأى مجموعة من المقادير تعرِّف فصلا من المقادير أقل منها جميعاً ، وهذا الفصل من المقادير يمكن أن نجعله من الصِّغر كما نحب ، ويمكن بالفعل أن نجعله الفصل الصفرى أى لا يشتمل على حدود إطلاقاً . (ويحدث ذلك مثلا إذا كانت المجموعة تشتمل على جميع المقادير من النوع) والفصول التى تعرِّف على هذا النحو تكوِّن متسلسلة لها صلة وثيقة بمتسلسلة المقادير الأصلية ، وفى هذه المتسلسلة الجديدة ، الفصل الصفرى هو قطعاً أول حد . وهكذا إذا اعتبرنا الفصول كميات ، فالفصل الصفرى هو كمية صفر ، وليس هناك فصل يشتمل على عدد متناه من الأعضاء ، فلا يكون هناك كما هى الحال فى الحساب اقتراب منفصل من الفصل الصفرى ، على العكس الاقتراب بمعان متعددة لهذه اللفظة متصل. وهذه الطريقة فى تعريف الصفر المطابقة لتلك التى تدخل العدد الحقيقى الصفر مهمة ، وسنناقشها فى الجزء الرابع . ولكننا الآن يمكن أن نلاحظ أن هذا التعريف

(١) ارجع فى هذه النقطة إلى بند ٥٥ ، فيما سبق .

يجعل الصفر واحداً لجميع أنواع المقادير ، ولا يجعله واحداً من بين المقادير التى يكون الصفر منها .

١٧٧ – (٥) نحن مضطرون فى هذه المسألة أن نواجه المشكلة الخاصة بطبيعة السلب . من الواضح أن « لا لذة » تصورٌ مختلف عن « لا ألم » حتى حين يؤخذ هذان الحدان بدقة على أنهما مجرد إنكار للذة وللألم على التعاقب . وقد يبدو أن « لا لذة » لها نفس العلاقة « باللذة » كما يكون لمختلف المقادير من اللذة ، ولو أن لها كذلك طبعاً العلاقة الخاصة بالسلب . فإذا سلمنا بذلك رأينا أنه إذا عرّف نوع من المقادير بالشىء الذى به كانت مقادير فيترتب على ذلك أنه « لا لذة » واحد من بين المقادير المتعددة للذة . فإذا تمسكنا بيديهتنا من أن جميع أزواج المقادير من نوع واحد لها علاقات لامساواة ، فينبغى أن نسلم أن الصفر أقل من جميع المقادير الأخرى من نوعه . حقاً يبدو من الواضح أنه يجب التسليم بذلك، من واقع أن الصفر من الجلى أنه « ليس أكبر » من جميع المقادير الأخرى من نوعه . وهذا يبين أن للصفر علاقة مع « أصغر » ليست له مع « أكبر » . وإذا نحن أخذنا بهذه النظرية فلن نقبل بعد الرأى الواضح والبسيط عن المسافات الصفر مما سبق ذكره ، ولكننا سنذهب إلى أن المسافة الصفر هى بالدقة وفقط « لا مسافة » وأنها مترابطة فقط بالتطابق .

وهكذا قد يبدو أن نظرية الأستاذ مينونج التى بدأنا بها صحيحة جوهرياً وإنما تحتاج إلى تعديل طبقاً للنظرية السابقة فى هذا الأمر : وهو أن المقدار الصفر هو إنكار التصور المعرف لنوع من المقادير ، وليس إنكار أى مقدار واحد خاص أو إنكارها جميعاً. ولابد لنا أن نذهب ، إلى أن أى تصور يعرّف نوعاً من المقادير يعرف كذلك بسلبه مقداراً خاصاً من النوع يسمى صفر ذلك النوع ، ويكون أقل من جميع الأعضاء الأخرى من النوع . فنحن الآن نجنى ثمرة التمييز المطلق الذى أجريناه بين التصور المعرف لنوع من المقدار وبين مختلف المقادير من النوع . والعلاقة التى سلمنا بها بين مقدار خاص وبين ذلك الذى هى مقدار له لم تكن متطابقة مع فصل العلاقة ، بل تقرر أنها ذاتية ؛

فلا تناقض إذن كماهو الحال فى معظم النظريات فى افتراض أن هذه العلاقة تقوم بين « لا لذة » و « لذة » ، أو بين « لا مسافة » و « مسافة »

١٧٨ — وأخيراً علينا أن نلاحظ أن « لا لذة »، وهى المقدار الصفر ، لا نحصل عليها من الإنكار المنطقى للذة ، وليست نفس الشىء كالمعنى المنطقى لـ « لا لذة » . على العكس « لا لذة »تصور كمى أساساً ، له علاقة غريبة ووثيقة بالإنكار المنطقى ، تماماً كما أن ٠ له علاقة وثيقة جداً بالفصل الصفرى. وهذه العلاقة هى أنه ليس هناك « كمية » مقدارها صفر حتى يكون فصل الكميات الصفر هو الفصل الصفرى [1] . وصفر أى نوع من المقدار قاصر عن تلك العلاقة بالوجود أو بالجزئيات ، والمقادير الأخرى تقوى عليها . ولكن هذه قضية تركيبية ، لنا فقط أن نقبلها على أساس أنها بيِّنة بذاتها . والمقدار الصفر من أى نوع هو كالمقادير الأخرى غير قابل للتعريف بمعنى الكلمة ، ولكنه يقبل التعيين بواسطة علاقته الخاصة بالصفر المنطقى .

---

(١) يجب أن يطبق هذا لتصحيح ما سبق قوله عن المسافات الصفر .

الباب الثالث والعشرون

اللانهاية، واللامتناهي في الصغر، والاتصال

١٧٩ — تكاد جميع الأفكار الرياضية تعرض صعوبة كبيرة واحدة هي اللانهاية، التي يعتبرها الفلاسفة عادة كنقيضة، وعلى أنها تبين أن قضايا الرياضة ليست صحيحة ميتافيزيقيا. وإني مضطر أن أختلف مع هذا الرأي المأثور. فمع أن جميع النقائض الظاهرة، إلا تلك التي يمكن بسهولة التخلص منها، والتي تنتمي لأسس المنطق، فهي في نظري قابلة أن ترد إلى هذه الصعوبة الواحدة وهي العدد اللانهائي، ومع ذلك فهذه الصعوبة نفسها يظهر أنها تقبل الحل بواسطة فلسفة صحيحة عن «أي any»، وأنها قد تولدت إلى حد كبير من بلبلة ترجع إلى إبهام في معنى الأعداد الصحيحة المنتهية. وستناقش المشكلة بوجه عام في الجزء الرابع، أما غرض الباب الحالي فإنما هو بيان أن الكمية، التي كانت تعتبر الموئل الصحيح للانهاية واللانهائي في الصغر والاتصال، يجب أن تخلي السبيل في هذا الصدد للترتيب، حيث أن تقرير الصعوبات التي تنشأ فيما يختص بالكمية يمكن أن تصاغ في صورة ترتيبية وحسابية في وقت واحد، دون أن تتطلب الإشارة إلى المميزات الخاصة بالكمية.

١٨٠ — والمشكلات الثلاثة عن اللانهاية واللانهائي في الصغر والاتصال، من جهة حصولها متصلة بالكمية، لها ببعضها علاقة وثيقة، ولا واحدة منها يمكن أن تناقش مناقشة كاملة في هذه المرحلة ما دامت كلها تعتمد أساساً على الترتيب، على حين يعتمد اللانهائي في الصغر أيضاً على العدد. ومسألة الكمية اللانهائية ولو أنها تعتبر من الناحية التقليدية أعوص من الصفر، إلا أنها في الحقيقة أقل خطراً، ويمكن باختصار التخلص منها، لولا ما يظهره الفلاسفة عادة من تمسك شديد بقضية سأسميها بديهية التناهي. ويظهر أنه من الصحيح من أمر بعض

أنواع المقدار (مثل النسب أو المسافات فى المكان والزمان) أن هناك مقداراً أكبر من أى مقدار معلوم . ومعنى ذلك أن أى مقدار حين يذكر ، فيمكن أن نجد مقداراً آخر أكبر منه . واستنتاج اللانهاية من هذه الحقيقة ، حين يكون الاستنتاج صحيحاً ، هو مجرد خرافة لتيسير تقرير النتائج التى نحصل عليها بطرية النهايات فى صورة مختصرة . إن أى فصل ى من المقادير من النوع المطلوب إذا عرّف ، فيمكن أن تنشأ ثلاث حالات :

١ — قد يكون هناك فصل من الحدود أكبر من نوعنا ى ، وهذا الفصل الجديد من الحدود قد يكون له عضو أصغر .

٢ — قد يكون هناك مثل هذا الفصل ولكن قد لا يكون له عضو أصغر .

٣ — قد لا تكون هناك مقادير أكبر من « أى » حد فى فصلنا ى .

فإذا فرضنا أن نوع المقادير مما ليس فيه مقدار أكبر ، فإن الحالة رقم (٢) ستنشأ دائماً حيث يشتمل الفصل ى على عدد متناه من الحدود . ومن ناحية أخرى إذا كانت متسلسلتنا مما تسمى Condensed in itself الكثيفة على نفسها ، فلن تنشأ الحالة رقم (٢) أبداً حين يكون ى فصلا لا نهائياً وليس له حد أكبر ؛ وإذا لم تكن متسلسلتنا كثيفة على نفسها ، بل لها حد بين أى حدين ، فيمكن الحصول دائماً على متسلسلة أخرى منها لها هذه الخاصية [١] . وهكذا فإن جميع المتسلسلات اللانهائية التى ليس لها حد أكبر سيكون لها نهايات ، فيما عدا حالة (٣) . ولتجنب الإطناب نعرف الحالة (٣) بأنها تلك التى تكون النهاية فيها لانهائية . ولكن هذه هى مجرد حيلة يسلم عموماً بها الرياضيون على أنها كذلك. وبصرف النظر عن الأحوال الخاصة ، فليس ثمة سبب لمجرد أن نوعاً من المقادير ليس له نهاية عظمى للتسليم بأن ثمة مقداراً لانهائياً من هذا النوع أو ثمة كثيراً منها كذلك . وحين تقبل مقادير من نوع مَّا ليس لها نهاية عظمى القياس العددى ، فإنها تخضع فى الغالب لبديهية أرشميدس والتى بمقتضاها تكون نسبة أى مقدارين من النوع متناهية . وهكذا يتضح من هذه المناقشة أنه قد لا يكون

---

(١) سنشرح هذا فيما بعد فى الجزء الخامس الفصل الرابع والثلاثين .

ثمة مشكلة متصلة باللانهاية .

ولكن عند هذه النقطة يكون الفيلسوف جديراً بالتدخل فيعلن أنه طبقاً لجميع المبادىء الفلسفية الصحيحة كل متسلسلة من الحدود معرفة تعريفاً جيداً فلا بد أن يكون لها حد أخير . فإذا ألح فى خلق هذا الحد الأخير ، وسماه اللانهاية ، فإنه يستنتج بسهولة متناقضات لا تطاق يستدل بها على عجز الرياضة عن الحصول على الحقيقة المطلقة . ومع ذلك فلست أرى من جانبى سبباً لبديهية الفيلسوف . ولكى نبين إذا أمكن أنها ليست مبدأً فلسفياً ضرورياً ، فلنحاول تحليلها ونرى ما يدخل فيها حقيقة .

مشكلة اللانهاية كما برزت لنا الآن ليست بالضبط مشكلة كمية بل الأولى أنها مما يتعلق بالترتيب . وتنشأ المشكلة لمجرد أن مقاديرنا تكوّن متسلسلة ليس لها حد أخير ، أما أن المتسلسلة مركبة من مقادير فليس داخلا فى الحساب أصلا . وبهذه الملاحظة يمكن أن أرجئ مناقشة الموضوع إلى مرحلة مقبلة . غير أنه من الجدير الآن أن نكشف عن بديهية الفيلسوف الخاصة بالتناهى إذا لم يتيسر بحثها .

١٨١ — ويحسن من ابتداء الأمر أن نبيّن كيف أن المشكلة الخاصة باللانهاية هى نفس تلك الخاصة بالاتصال واللانهائى فى الصغر . ولتحقيق هذا الغرض سنجد من المناسب تجاهل الصفر المطلق ، وأن نعنى ، حين نتكلم عن أى نوع من المقادير ، جميع المقادير من النوع ما عدا الصفر . وهذا مجرد تغيير فى العبارة ، وبدون هذا التغيير لابد من تكرار لا يطاق . والآن هناك بكل تأكيد بعض أنواع من المقادير تقوم على البديهيات الثلاث الآتية :

(١) إذا كان ا و ب أى مقدارين من النوع ، وكان ا أكبر من ب ، فهناك دائماً مقدار ثالث حـ بحيث يكون ا أكبر من حـ ، حـ أكبر من ب (سأسمى هذه البديهية فى الوقت الحاضر بديهية الاتصال) .

(٢) هناك دائماً مقدار أصغر من أى مقدار معلوم ب .

(٣) هناك دائماً مقدار أكبر من أى مقدار معلوم ا .

ويترتب على هذه البديهيات ما يأتى :

١ — لا مقدارين من النوع متعاقبان .

٢ — لا يوجد مقدار هو الأصغر — هو أصغر مقدار .

٣ — لا يوجد مقدار هو الأكبر — هو أكبر مقدار .

القضايا السابقة صحيحة بكل تأكيد عن « بعض » أنواع المقدار ، ويبقى أن نفحص أتكون صحيحة عن « جميع » الأنواع . أما القضايا الثلاث الآتية ، وهى التى تناقض مباشرة الثلاث السابقة فيجب أن تكون دائماً صادقة إذا كنا سنسلم ببديهية الفيلسوف عن التناهى .

(ا) هناك مقادير متعاقبة ، نعنى مقادير بحيث لا مقدار آخر من نفس النوع أكبر من الأصغر ، وأصغر من الأكبر لمقدارين معلومين .

(ب) هناك مقدار أصغر من أى مقدار آخر من نفس النوع .

(حـ) هناك مقدار أكبر من أى مقدار آخر من نفس النوع [1] .

ولما كانت هذه القضايا الثلاث تناقض مباشرة الثلاث السابقة ، فقد يبدو أن كلا المجموعتين لا يمكن أن تكونا صحيحتين معاً . وسنناقش أسس المجموعتين ، ثم نستبعد إحداهما .

والآن لنبدأ بالقضايا (ا) ، (ب) ، (حـ) ونبحث طبيعة الأسس التى تقوم عليها كل منها :

١٨٢ — (ا) إذا علم مقدار محدود ا ، فجميع المقادير الأكبر من ا تكوّن متسلسلة فروقها عن ا هى مقادير من نوع جديد . فإذا وجد مقدار ب متعاقب مع ا ، فالفرق بينه وبين ا سيكون أصغر مقدار من نوعه ، بشرط أن تناظر الامتدادات المتساوية المسافات المتساوية فى المتسلسلة . وبالعكس إذا

---

(١) أولئك الهيجليون الذين يلتمسون فرصة وجود نقيضة يمكن أن يتقدموا إلى تعريف الصفر واللانهاية بواسطة القضايا السابقة . حين نسلم برقم (٢) ، (ب) معاً ، فقد يقولون إن المقدار الذى يحقق (ب) يسمى صفراً . وحين نسلم رقم (٣) ، (حـ) معاً ، فالمقدار الذى يحقق (حـ) يسمى اللانهاية . ومع ذلك فقد رأينا أن الصفر يجب أن يعرف بطريقة أخرى ، وأن يستبعد قبل أن يصبح (٢) صحيحة ، وعلى حين أن اللانهاية ليست مقداراً من النوع المذكور ألبتة ، بل مجرد اختصار رياضى (ليست اللانهاية بوجه عام هى المقصودة بل المقدار اللانهائى فى الأحوال التى نناقشها) .

كان هناك أصغر فرق بين مقدارين ا ، ب ، فلا بد أن يكون هذان المقداران متعاقبين . وإذا لم يكن الأمر كذلك فأى مقدار متوسط سيكون له مع ا فرق أصغر من الفرق الذى بين ب و ا . وهكذا إذا كانت قضية (ب) كلية صادقة ، فإن (ا) تكون صادقة كذلك . وبالعكس إذا كانت (ا) صادقة ، وكانت متسلسلة المقادير بحيث تناظر الامتدادات المتساوية المسافات المتساوية ، فإن (ب) صادقة بالنسبة للمسافات بين المقادير المذكورة . وقد نقنع برد (ا) إلى (ب) ، ثم نشرع إلى إثبات (ب) . ولكن يبدو من الجدير أن نقدم برهاناً مباشراً، مما نفترض وجوده فى ذهن فلاسفة التناهى .

يوجد بين ا و ب عدد معين من المقادير ، إلا إذا كان ا و ب متعاقبين . وجميع المقادير المتوسطة لها ترتيب ، بحيث إذا سرنا من ا إلى ب مررنا بجميع المقادير المتوسطة . وفى مثل هذا العد لا بد أن يكون هناك مقدار « ما » يأتى عقب أى مقدار حـ . أو إذا وضعنا المسألة بصورة أخرى ، فما دام العد لا بد أن يبدأ ، فيجب أن يبدأ من مكان ما ، والحد الذى يبدأ به لا بد أن يكون المقدار الذى يعقب ا . فإذا لم يكن الأمر كذلك ، فلن تكون هناك متسلسلة محددة ، لأنه إذا كانت جميع الحدود لها ترتيب ، فبعضها لا بد أن يكون متعاقباً .

والمهم فى الحجة السابقة هو اعتمادها على العدد . وتدور الحجة بأسرها على المبدأ الذى به يتبين أن العدد اللانهائى متناقض مع نفسه ، وهذا المبدأ هو : « أى مجموعة معلومة من الحدود فلا بد أن تشتمل على عدد متناه من الحدود ».فنقول : جميع المقادير بين ا و ب تكون مجموعة ، فإذا لم يكن هناك مثل هذه المقادير ، كان ا و ب متعاقبين ، وتقررت المسألة . وإذا كان هناك مثل هذه المقادير ، فلا بد أن يكون هناك عدد متناه منها ، ليكن ن . وما دامت تكون متسلسلة ، فهناك طريقة محددة لتعيينها بالأعداد الترتيبية من ا إلى ن . وبناء على ذلك يكون الذى ترتيبه م ، والذى ترتيبه (م + ١) متعاقبين .

وإذا أنكرنا البديهية المذكورة فى الفقرة السابقة بين حاصرتين ، انهارت

الحجة كلها. وهذه أيضاً كما سنرى هى الحالة بالنسبة ا (ب) ، (حـ) .

(ب) البرهان هنا شبيه بالضبط بالبرهان فى (ا) . إذا لم يكن هناك مقادير أصغر من ا ، إذن ا هى أصغر مقدار من نوعها ، وتتقرر المسألة . فإذا كان هناك مقادير فإنها تكوّن مجموعة معينة ، فيكون لها (بحكم بديهيتنا) عدد متناه ، وليكن ٮ . وما دامت تكوّن متسلسلة ، فيمكن أن نعين للمقادير أعداداً ترتيبية تتزايد كلما أصبحت المقادير أبعد فأبعد من ا . وهكذا فإن المقدار النونى هو أصغر مقدار من نوعه .

(حـ) نحصل هنا على البرهان كما حصلنا عليه فى (ب) إذا اعتبرنا مجموعة المقادير أكبر من ا . وهكذا فإن كل شىء يعتمد على بديهيتنا التى بدونها لا يمكن أن يكون لنا ما نقوله ضد الاتصال ، أو ضد عدم وجود أكبر أو أصغر مقدار .

أما فيما يختص بالبديهية نفسها فسنرى أن ليس لها إشارة خاصة إلى الكمية ، ولأول وهلة قد يبدو أن ليس لها إشارة إلى الترتيب . ولكن لفظة « المتناهى » التى تقع فيها تحتاج إلى تعريف . وهذا التعريف فى الصورة الملائمة بالمناقشة الحاضرة له كما سنرى إشارة جوهرية إلى الترتيب .

١٨٣ ـــ أشك فى أن أحداً من الفلاسفة الذين طعنوا فى العدد اللانهائى قد عرف الفرق بين الأعداد المتناهية واللامتناهية . والفرق ببساطة هو ما يأتى : تخضع الأعداد المتناهية لقانون الاستنباط الرياضى ، ولا تخضع لها الأعداد اللامتناهية . بعبارة أخرى إذا علم أى عدد ٮ ، فإذا كان ٮ ينتمى لكل فصل س ينتمى إليه ٠ ، وينتمى إليه أيضاً العدد التالى بعد أى عدد من أعداد الفصل س ، إذن ٮ متناه ؛ وإذا لم يكن كذلك لم يكن متناهياً . وفى هذا وحده وما يترتب عليه من نتائج تفترق الأعداد المتناهية عن اللامتناهية [1] .

ويمكن صياغة المبدأ بنحو آخر كما يأتى : إذا كانت كل قضية تصح بالنسبة إلى ٠ ، وتصح كذلك بالنسبة للتالى المباشر لكل عدد تصدق عليه ،

---

(١) يجب مع ذلك أن نذكر أن إحدى هذه النتائج تعطى رقاً منطقيا بين الأعداد المتناهية واللامتناهية مما قد يؤخذ على أنه تعريف مستقل . وقد شرحنا ذلك فى الجزء الثانى الباب الثالث عشر، وسنناقشه فيما بعد فى الجزء الخامس .

فإنها تصح بالنسبة للعدد ن ، فإذن ن متناه ؛ وإذا لم يكن الأمر كذلك لم يكن متناهياً . وهذا هو المعنى الدقيق لما يمكن أن نعبر عنه تعبيراً شائعاً بقولنا : إن كل عدد متناه يمكن أن نصل إليه من ٠ بخطوات متتالية ، أو بالجمع المتتالى لـ ١ . وهذا هو المبدأ الذى يجب على الفيلسوف أن يسلم به على أنه منطبق بوضوح على جميع الأعداد ، ولو أنه مضطر إلى التسليم بأن المبدأ كلما كانت صياغته أدق ، كلما أصبح أقل وضوحاً .

١٨٤ — من الجدير أن نبين بالضبط كيف يدخل الاستنباط الرياضى فى الأدلة السابقة. ولنأخذ الدليل الموجود فى (ا) ولنفرض أن هناك ن من المقادير بين ا و ب . ثم لكى نبدأ فقد فرضنا أن هذه المقادير تقبل العد ، أى تقبل ترتيباً فيه حدود متعاقبة وحد أول ، وحد يسبق مباشرة أى حد ما عدا الأول . وهذه الخاصية تفترض مقدماً الاستنباط الرياضى ، وكانت فى الواقع الخاصية المتنازع عليها . ولذلك لا ينبغى أن نفترض مقدماً إمكان العد ، وإلا كان ذلك مصادرة على المطلوب . ولكن دعنا نصل إلى لب الدليل : لقد فرضنا أنه فى أى متسلسلة يجب أن يكون هناك طريقة محددة لتعيين الأعداد الترتيبية للحدود . وهذه الخاصية تنتمى لمتسلسلة من حد واحد ، كما تنتمى لكل متسلسلة لها م + ١ من الحدود ، إذا كانت تنتمى لكل متسلسلة لها م من الحدود . وبناء على ذلك بواسطة الاستنباط الرياضى تنتمى لجميع المتسلسلات التى لها عدد متناه من الحدود . ولكن إذا سلمنا بأن عدد الحدود ليس متناهياً ، لانهار الدليل كله .

وفيما يختص بـ (ب) و (ج) الدليل متشابه . كل متسلسلة لها عدد متناه من الحدود فيمكن أن نبين بالاستنباط الرياضى أن لها حداً أول وحداً أخيراً ، ولكن لا توجد طريقة لإثبات ذلك فيما يختص بالمتسلسلات الأخرى ، أو لإثبات أن جميع المتسلسلات متناهية . وبالاختصار ، الاستنباط الرياضى ، مثل بديهية التوازى ، نافع ومناسب فى موضعه الصحيح ، ولكن أن نفترض أنه صادق دائماً فهذا يسلمنا إلى استبداد مجرد الهوى . ومن أجل ذلك كانت أدلة فلاسفة التناهى قائمة على مبدأ يجهلونه ، ولا سبب يدعونا إلى إثباته ، وكل سبب

يدعو إلى نفيه . وبهذه النتيجة يمكن اعتبار النقائض الظاهرة قد حلت .

١٨٥ – بقى أن ننظر ما أنواع المقدار التى تحقق القضايا (١) ، (٢) ، (٣) . وليس ثمة مبدأ عام على أساسه يمكن إثبات هذه القضايا أو دحضها ، ولكن هناك بكل تأكيد أحوال تكون فيها صادقة وأخرى كاذبة . ويسلم الفلاسفة بوجه عام أن الأعداد منفصلة أساساً ، على حين أن المقادير متصلة أساساً . وسنرى أن الأمر ليس على هذه الحال . فالأعداد الحقيقية لها أكمل اتصال معروف ، على حين ليس لأنواع كثيرة من المقادير أى اتصال ألبتة . ولفظة « الاتصال » لها معان كثيرة ، ولكن فى الرياضيات لها معنيان فقط ، أحدهما قديم والآخر جديد . ولأغراضنا الحاضرة يكفى المعنى القديم ، ولهذا سأضع فى الوقت الحاضر التعريف الآتى :

« الاتصال » ينطبق على المتسلسلات (وعلى المتسلسلات فقط) حيثما تكون هذه المتسلسلات بحيث يكون هناك حد بين أى حدين معلومين [١] . وكل ما ليس متسلسلة أو مركباً من متسلسلات ، أو كل متسلسلة لا تحقق الشرط المذكور سابقاً ، فهو غير متصل .

وهكذا فإن متسلسلة الأعداد المُنْطَقَة متصلة ، لأن الوسط الحسابى لاثنين منها هو دائماً عدد مُنْطق ثالث بين الاثنين . وحروف الأبجدية ليست متصلة .

وقد رأينا أن أى حدين فى متسلسلة فبينهما مسافة ، أو امتداد له مقدار . وما دام هناك بكل تأكيد متسلسلات منفصلة (مثل الأبجدية) فهناك بكل تأكيد مقادير منفصلة ، وهى المسافات أو امتدادات الحدود فى المتسلسلات المنفصلة . والمسافة بين الحرفين ا و حـ أكبر من المسافة بين ا و ب ، ولكن ليس ثمة مقدار هو أكبر من واحد منهما وأصغر من الآخر . وفى هذه الحالة يوجد كذلك أكبر مسافة ممكنة ، وأصغر مسافة ممكنة بحيث تنهار جميع القضايا الثلاث (١) ، (٢) ، (٣) . ومع ذلك فلا ينبغى افتراض أن القضايا الثلاث

---

(١) الاعتراض على هذا التعريف (كما سنرى فى الجزء الخامس) هو أنه لا يعطى الخصائص العادية لوجود النهايات للمتسلسلات التقاربية التى ترتبط عادة بالاتصال – والمتسلسلات من النوع السابق ستسمى « المحكمة » Compact ، ما عدا فى المناقشة الحاضرة .

لها أى ارتباط ضرورى . فنى حالة الأعداد الصحيحة مثلا هناك مسافات متعاقبة ، وهناك أصغر مسافة ممكنة وهى تلك التى بين عددين صحيحين متعاقبين ، ولكن لا توجد أكبر مسافة ممكنة . وهكذا فإن (٣) صادقة ، على حين (١) ، (٢) كاذبتان . وفى حالة متسلسلة النغمات ، أو الألوان فى قوس قزح ، للمتسلسلة بداية ونهاية ، بحيث يكون هناك أكبر مسافة ، ولكن لا يوجد أصغر مسافة ، وهناك حد بين أى اثنين . وهكذا فإن (١) ، (٢) صادقتان على حين أن (٣) كاذبة . أو مرة أخرى إذا أخذنا المتسلسلة المركبة من صفر ومن الكسور التى يؤخذ واحد منها بسطاً ، فهناك أكبر مسافة ، ولكن ليس هناك أصغر مسافة مع أن المتسلسلة منفصلة. وهكذا فإن (٢) صادقة على حين أن (١) ، (٣) كاذبتان . ويمكن الحصول على توافيق أخرى من متسلسلات أخرى .

وهكذا فإن القضايا الثلاث (١) ، (٢) ، (٣) ليس بينها ارتباط ضرورى ، وجميعها أو أى منها قد تكون كاذبة حين تطبق على أى نوع معلوم من المقدار . ولا يمكننا أن نأمل إذن فى إثبات صدقها من طبيعة المقدار . وإذا كان لا بد أن تكون صادقة فينبغى إثباتها مستقلة ، أو نكشف عنها بمجرد الفحص فى كل حالة خاصة . أما أنها تكون صادقة فى بعض الأحيان فيظهر من النظر إلى المسافات بين الحدود فى المتصل العددى number-continuum أو فى الأعداد المُنْطقة . فكل من هاتين المتسلسلتين متصل بالمعنى المذكور آنفاً وليس له حد أول أو أخير (حين نستبعد الصفر) . وعلى ذلك فإن مسافاتها أو امتداداتها تحقق جميع الشروط الثلاثة . ويمكن أن نستدل على نفس الشىء من المكان أو الزمان ، ولكنى لا أود استباق ما سنقوله عنهما . وكميات الانقسام لاتحقق هذه الشروط حين تكون الكلات التى تقبل الانقسام مشتملة على عدد متناه من الأجزاء اللامنقسمة . ولكن حيث يكون عدد الأجزاء لامتناهياً فى فصل بأسره من المقادير المختلفة ، فإن جميع الشروط الثلاثة تتحقق كما يظهر من خصائص المتصل العددى .

وهكذا نرى أن مشكلتى اللانهاية والاتصال ليس لهما ارتباط جوهرى بالكمية ولكنهما يرجعان إذا أثارتهما المقادير إلى مميزات تعتمد على العدد والترتيب . ومن ثمّ فإن مناقشة هاتين المشكلتين إنما يمكن الخوض فيها بعد عرض نظرية الترتيب البحت [1] . وهذا هو غرضنا من الجزء القادم .

١٨٦ — يمكن أن نلخص الآن النتائج التى حصلنا عليها من الجزء الثالث . فى الباب التاسع عشر استقر بنا الرأى على تعريف المقدار بأنه كل ما كان أكبر أو أصغر من شىء مّا آخر . ووجدنا أن المقدار ليس له ارتباط ضرورى بالانقسام ، وأن الأكبر والأصغر لامعرفان . ورأينا أن كل مقدار له علاقة معينة — شبيهة بالاستغراق فى فصل ، ولكنها غير متطابقة معه — بكيفية معينة أو علاقة معينة . وهذه الحقيقة هى التى نعبر عنها بقولنا : إن المقدار المذكور هو مقدار « ل » تلك الكيفية أو العلاقة . وعرفنا « الكمية » بأنها جزئى يشتمل المقدار عليه ، أى على أنه المركب الذى يتألف من مقدار مع وضع زمكانى معين ، أو مع زوج من الحدود ، الكميةُ علاقةٌ بينهما . وقررنا بواسطة مبدأ عام متصل بالعلاقات المتعدية المتماثلة أنه من المستحيل أن نقصر أنفسنا على الكميات ، وأن ننكر التجريد الأعظم الداخل فى المقادير . وقررنا أن المساواة ليست علاقةً مباشرة بين كميات ، ولكنها تقوم على أنها تخصيص لنفس المقدار . وهكذا فإن الكميات المتساوية هى أمثلة لنفس المقدار . وكذلك ليس الأكبر والأصغر علاقتين مباشرتين بين كميات بل بين مقادير . والكميات إنما هى أكبر وأصغر بسبب أنها حالات لمقادير أكبر وأصغر . وأى مقدارين من نفس الكيفية أو العلاقة فأحدهما أكبر والآخر أصغر . والأكبر والأصغر علاقتان متعديتان متماثلتان .

وبين الحدود التى لها مقدار لا توجد كيفيات كثيرة فقط بل علاقات متماثلة بها تتكوّن بعض أنواع المتسلسلات . وهذه قد تسمى « مسافات » . وحين توجد مسافات فى متسلسلة ، فأى حدين من المتسلسلة لهما مسافة متطابقة مع

(١) انظر Couturat "*Sur la Définition du Continu*," *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1900.

المسافة الأكبر أو الأصغر بين أى حدين آخرين فى المتسلسلة . وهناك فصل آخر غريب من المقادير ناقشناه فى الباب العشرين يتكون من درجات الانقسام فى الكلات المختلفة . وقد رأينا أن هذه هى الحالة الوحيدة التى تكون فيها الكميات منقسمة ، بينما لا يوجد أى حالة على المقادير المنقسمة .

وقد احتاج القياس العددى الذى ناقشناه فى الباب الحادى والعشرين إلى معالجة غير عادية بعض الشىء نظراً إلى ما قررناه من أن معظم الكميات وجميع المقادير لا تقبل الانقسام . وقد رأينا أن المشكلة تنحصر فى وضع علاقة واحد بواحد بين الأعداد والمقادير من النوع المطلوب قياسه ، ووجدنا أن هذا ممكن نظرياً على أساس بعض الفروض الميتافيزيقية (التى لم تُقْبَل ولم ترفض) وذلك فيما يختص بالموجودات الفعلية أو الممكنة ، ولو أن ذلك فى الغالب ليس مما يمكن إجراؤه عملياً ، أو ليس بذى أهمية . أمَّا فيما يختص بفصلين من المقادير هما الانقسامات والمسافات ، فقد رأينا أن القياس يسير من اصطلاح طبيعى جداً يعرف المقصود من قولنا (مما لا يمكن أن يكون له المعنى البسيط الذى له فيما يختص بالكلات والأجزاء المتناهية) إن مقداراً واحداً من هذه المقادير هو ضعف مقدار آخر أو مثله ن من المرات . وناقشنا علاقة المسافة بالامتداد ووجدنا أنه ، بصرف النظر عن بديهية خاصة فى هذا الصدد ، لا يوجد سبب أولى لاعتبار المسافات المتساوية مناظرة للامتدادات المتساوية .

وناقشنا فى الباب الثانى والعشرين تعريف الصفر . ورأينا أن مشكلة الصفر لا صلة لها بمشكلة اللانهائى فى الصغر ، من حيث إنها مرتبطة ارتباطاً وثيقاً فى الواقع بالمشكلة المنطقية البحت الخاصة بطبيعة السلب ، وقررنا أنه كما يوجد السلب المنطقى المتميز عن السلب الرياضى كذلك يوجد نوع ثالث أساسى هو السلب الكمى . وأن هذا السلب الكمى هو سلب الكيفية أو العلاقة التى للمقادير، لا سلب المقدار عن تلك الكيفية أو العلاقة . ومن ثم يمكننا اعتبار الصفر واحداً من بين المقادير التى يشتمل عليها نوع من المقدار ، وأن نميز الأصفار من أنواع مختلفة . وبينا أيضاً أن السلب الكمى مرتبط بالسلب المنطقى من حيث

إنه لا يمكن وجود أى كميات مقدارها صفر .

وفى الباب الأخير بينا أن مشكلات الاتصال واللانهاية واللانهائى فى الصغر لا تنتمى بوجه خاص إلى نظرية الكمية بل إلى نظريات العدد والترتيب . وبينا أنه ، ولو أن هناك أنواعاً من المقدار ليس فيها مقدار أكبر أو أصغر ، فإن هذه الحقيقة لا تجعلنا نسلم بوجود مقادير لانهائية أو لانهائية فى الصغر ، وأنه لا تناقض فى افتراض نوع من المقادير تكوّن متسلسلة فيها حد بين أى اثنين ، وليس فيها تبعاً لذلك أى حد يتعاقب مع حد معلوم . واتضح أن التناقض المزعوم ناشئ من استخدام غير مناسب للاستنباط الرياضى — وهو مبدأ تفترض مناقشته الكاملة النظر فى فلسفة الترتيب .

فهرس

الجزء الثانى

العدد

الجزء الثالث

الكمية

تم طبع هذا الكتاب على مطابع
دار المعارف بمصر سنة ١٩٥٩

